

CALCULO DE PARAMETROS Y OPERACIÓN EN ESTADO ESTACIONARIO DE LINEAS DE TRANSMISION

0. Calculo de parámetros de líneas aéreas de transmisión

INTRODUCCION.

La energía eléctrica producida en las estaciones generadoras es transportada a grandes distancias y alto voltaje a través de líneas de transmisión hasta los puntos de utilización. A principios del siglo XX, los sistemas eléctricos se operaban aislados y a voltajes bajos, de acuerdo a estándares actuales. Los voltajes de operación se incrementaron rápidamente desde los 3300 V hasta los 11 kV, usados para transmitir 10 MW desde Niagara Falls a Buffalo, en los Estados Unidos, a 20 millas de distancia, en el año de 1896. En 1936 se terminaron dos circuitos de 287 kV para transmitir 240 MW a 266 millas a través del desierto hasta Los Angeles. La primera línea de 345 kV se desarrolló a partir de un programa de pruebas de la AEP (American Electric Power) en 1946 y rápidamente se superpuso al sistema de 138 kV que se usaba extensivamente. Al mismo tiempo en Suecia se estableció el sistema de 400 kV entre sus plantas hidroeléctricas del norte, hasta los centros de carga de la región sur.

El sistema de 345 kV estableció la práctica de usar conductores en haz, la configuración en V de cadenas de aisladores (con el objeto de restringir oscilaciones), y el uso de aluminio en estructuras de líneas.

La primera línea de 500 kV fue energizada en 1964 en el estado de West Virginia en EU. Una razón para la preferencia de este nivel de voltaje sobre el nivel de 345 kV fue que el cambio de 230 kV a 345 kV, representaba una ganancia de solamente 140% comparada a una ganancia de 400%, cuando el cambio era a 500 kV. La compañía canadiense Hydro Québec inauguró su línea de 375 millas a 735 kV en el mismo año. En el año de 1969 la AEP puso en servicio un nivel de voltaje de 765 kV. Los años 80 atestiguaron la introducción de un nivel de voltaje aún más grande en la compañía estadounidense BPA: el sistema de transmisión de 1100 kV.

La tendencia de introducir voltajes más grandes está principalmente motivada por el incremento resultante en la capacidad de la línea, mientras se reducen las pérdidas por unidad de potencia transmitida. La reducción de pérdidas es significativa y es un aspecto importante de la conservación de la energía. Otro beneficio del incremento de

capacidad es el mejor uso de la tierra. Esto puede ilustrarse comparando el ancho del derecho de vía de 56 m requerido para el nivel de 1100 kV con una capacidad de 10,000 MW, con el de 76 m requerido para dos líneas de doble circuito en 500 kV para transmitir la misma capacidad de 10,000 MW.

El propósito de esta unidad 0, es el de desarrollar una comprensión adecuada en la modelación de líneas de transmisión, así como analizar su comportamiento. Se iniciará por discutir los parámetros que caracterizan a la línea de transmisión aérea.

PARAMETROS DE LINEAS AEREAS DE TRANSMISION ELECTRICA.

Una línea de transmisión eléctrica es modelada usando cuatro parámetros, que afectan sus características de comportamiento. Estos cuatro parámetros son: *resistencia serie, inductancia serie, capacitancia en derivación y conductancia en derivación*. Los dos primeros son de suma importancia en muchos estudios de interés. Sin embargo en algunos estudios es posible omitir los parámetros en derivación, simplificando con ello el circuito equivalente considerablemente.

Empezaremos con una discusión breve de la naturaleza de los conductores e introduciremos terminología comúnmente usada.

Un alambre ó combinación de alambres no aislados uno del otro es llamado *conductor*. Un conductor trenzado está compuesto de un grupo de alambres, usualmente enrollados en forma espiral.

El tamaño de los conductores ha sido indicado comercialmente en términos de calibres durante muchos años. Sin embargo en la actualidad la práctica consiste en especificar los tamaños de los conductores en términos de sus diámetros expresados en *mils* (unidad de longitud, 1/1000 de pulgada). El área de sección transversal está dada en *circular mils*. Un circular mil es el área de un círculo de un mil de diámetro. El círculo de un mil de diámetro. El círculo tiene un área de $(\pi/4)(1)\text{mil}^2$ ó 0.7854 mil^2 . El sistema AWG (American Wire Gage) está basado en una simple progresión geométrica. El diámetro del No. 0000 es definido como 0.46 pulgadas, y el No. 36 como 0.005. Existen 38 tamaños entre estos dos; de aquí que la razón de cualquier diámetro al diámetro del siguiente número más grande está dado por:

$$n_A = \left(\frac{0.46}{0.005} \right)^{1/39} = 1.1229322 .$$

Observando que $n_A^6 = 2.005$ nos conduce a concluir que el diámetro se duplica por una diferencia de seis calibres.

En conductores trenzados en forma concéntrica, cada capa sucesiva contiene seis alambres más que en la anterior. Existen dos construcciones básicas: núcleo de un solo alambre y núcleo de tres alambres. El número total de alambres (N) en un conductor con n capas sobre el núcleo, está dada por

$$N = 3n(n + 1) + 1 \quad \text{para núcleo de un alambre}$$

$$N = 3n(n + 2) + 3 \quad \text{para núcleo de tres alambres.}$$

El tamaño d en un conductor trenzado en un conductor trenzado con un área de conductor total de A circular mils y N alambres es $d = \left(\frac{A}{N} \right)^{1/2}$ mils .

TIPOS DE CONDUCTORES Y MATERIALES CONDUCTORES.

Los conductores de fase en sistemas de transmisión en EHV-UHV(Extra High Voltaje-Ultra High Voltaje), emplean conductores de aluminio, así como aluminio y acero para conductores de guarda. Existen muchos tipos de cables. Estos incluyen los siguientes:

A. Conductores de Aluminio

Existen cinco diseños en uso común:

0. Diseños homogéneos: estos están denotados como AAC (All-Aluminium-Conductor) o AAAC (All-Aluminium-Alloy conductor).
1. Diseños compuestos: esencialmente ACSR (Aluminium Conductor Steel Reinforced) con núcleo de acero.
2. ACSR expandido: estos usan torzales de aluminio sólidos con un núcleo de acero.

La expansión se lleva a cabo por medio de hélices abiertas de alambre de aluminio,

tubos concéntricos flexibles ó bien una combinación de alambres de aluminio y cuerdas fibrosas.

3. Conductores de Aluminio revestido (Aluminium-Clad Alumoweld)

4. Conductores de aluminio cubierto (Aluminium-coated)

B. Conductores de acero.

Se utilizan conductores de acero galvanizado con varios espesores de recubrimiento de zinc.

RESISTENCIA SERIE.

La resistencia de un conductor es la causa principal de la pérdida de potencia en la línea de transmisión. La resistencia de corriente directa está dada por la conocida fórmula

$$R_{CD} = \frac{\rho l}{A} \quad ohm$$

donde

ρ es la resistividad del conductor

l es la longitud

A es el área de sección transversal.

Cualquier conjunto consistente de unidades puede ser utilizado en el cálculo de la resistencia. En el sistema Internacional de unidades (SI), ρ se mide en ohms-metro, la longitud en metros y el área de sección transversal en metros al cuadrado. Un sistema comúnmente usado por los ingenieros de sistemas de potencia expresa la resistividad en ohms circular mils por pie, longitud en pies y el área en circular mils.

En los manuales se dan los valores de la resistividad para una colección importante de materiales usados en redes eléctricas. La resistencia del conductor se obtiene, generalmente, para 20⁰ C. El ajuste por temperatura del conductor se efectúa a través de la conocida fórmula:

$$R_2 = R_1 [1 + \alpha (T_2 - T_1)] \quad R_2 = R_1 [1 + \alpha (T_2 - T_1)]$$

En la fórmula anterior R_2 es la resistencia a temperatura T_2 , y R_1 es la resistencia a temperatura T_1 . Las variaciones de resistencia con la temperatura usualmente no son importantes (por ejemplo, 17% de incremento en la resistencia del cobre para un cambio de temperatura de 0⁰ C a 40⁰ C).

Existen sin embargo ciertas limitantes en el uso de esta ecuación para el cálculo de la resistencia de conductores de la línea de transmisión:

1. Se introduce un pequeño error cuando el conductor es trenzado y no sólido. Esto se debe a que los filamentos individuales son un poco más largos que el conductor mismo.
2. Cuando fluye corriente alterna en un conductor, la densidad de corriente no se distribuye uniformemente sobre el área de sección transversal. Esto se denomina efecto pelicular y es el resultado de una distribución de flujo no uniforme en el conductor. Lo anterior incrementa la resistencia del conductor al reducir el área efectiva de sección transversal a través de la cual fluye la corriente. Las tablas proporcionadas por los fabricantes dan la resistencia a frecuencias comerciales de 25, 50 y 60 Hz.
3. La resistencia en conductores magnéticos varía de acuerdo a la magnitud de la corriente. El flujo, y por lo tanto las pérdidas magnéticas dentro del conductor, dependen de la magnitud de la corriente. Las tablas de conductores magnéticos tales como ACSR, incluyen los datos de las resistencias a dos diferentes niveles de conducción para mostrar el efecto.
4. En una línea de transmisión no hay uniformidad en la distribución de la corriente, en adición de la causada por el efecto pelicular. En una línea de dos conductores, menos líneas de flujo enlazan a los elementos más cercanos entre si en los lados opuestos, que las líneas de flujo que enlazan a los elementos más alejados. De aquí que los lados más cercanos tendrán menor inductancia que los elementos en los lados más alejados. El resultado es una mayor densidad de corriente en los elementos conductores adyacentes más cercanos entre si, que en los elementos más

apartados de estos conductores. La resistencia efectiva se incrementa por la no uniformidad de la distribución de la corriente. El fenómeno se conoce como *efecto de proximidad*. Este está presente tanto en circuitos trifásicos, como en circuitos monofásicos. Para el espaciamiento usual en las líneas de 60 Hz, el efecto de proximidad se desprecia.

CONDUCTANCIA EN DERIVACION.

Este parámetro modela básicamente dos fenómenos que conducen a pérdidas de potencia real: corrientes de fuga en aisladores y efecto corona.

Generalmente las pérdidas de potencia real debidas a dichos fenómenos son muy pequeñas comparadas con las pérdidas $I^2 R$ en los conductores. Por esta razón este parámetro se desprecia en los estudios de sistemas de potencia.

INDUCTANCIA SERIE.

INDUCTANCIA DE UN CONDUCTOR SÓLIDO.

La inductancia de un circuito magnético con permeabilidad constante μ se puede obtener a través de:

1. Intensidad de campo magnético H , a partir de la Ley de Ampère.
2. Densidad de campo magnético B ($B = \mu H$).
3. Encadenamientos de flujo λ .
4. De la razón $\lambda/I = L$.

Calcularemos las inductancias asociadas con el flujo interno, externo y finalmente la total, que sería la suma de estas. Lo anterior para un conductor sólido inicialmente. Posteriormente calcularemos el flujo que enlaza un conductor en un arreglo de conductores en los que fluye una corriente.

Supondremos, sin sacrificar precisión y validez de los resultados, las siguientes simplificaciones:

1. La longitud del conductor es infinita, esto es, se desprecian los llamados efectos finales.
2. El material del conductor es no-magnético, es decir $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.
3. Densidad de corriente uniforme, o sea efecto pelicular despreciable.

Consideremos la figura 1, la cual muestra la sección transversal de un conductor cilíndrico, sólido y de una longitud unitaria. Observamos que por simetría las líneas de flujo del campo magnético es concéntrico, y por lo tanto no tienen componente radial sino únicamente tangencial, aplicamos la Ley de Ampère:

$$\oint H \cdot dl = I \quad (0.1)$$

H: Intensidad de campo magnético, A-vuelta/m

l : Distancia a lo largo de la trayectoria, m

I: Corriente encerrada por la trayectoria, Amp.

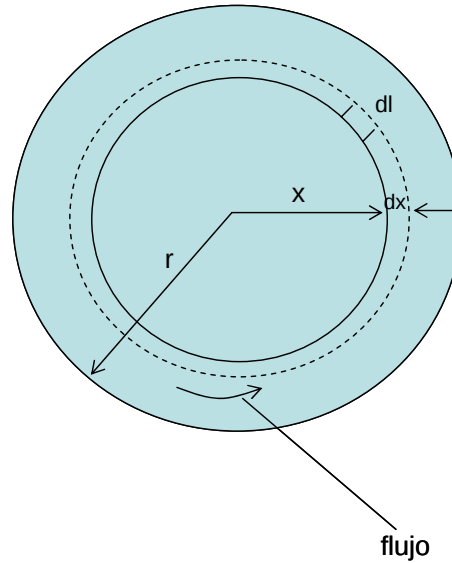


Figura 0.1. Sección transversal del conductor.

Sea H_x la componente tangencial de la intensidad de campo magnético a una distancia de x metros del centro del conductor, entonces de la ecuación (0.1):

$$\oint H_x dl = I_x \quad (0.2)$$

de donde resolviendo:

$$2\pi x H_x = I_x \quad (0.3)$$

aquí I_x es la corriente encerrada por la trayectoria de integración.

Si suponemos distribución uniforme tendremos:

$$I_x = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} I \quad (0.4)$$

Sustituyendo (0.4) en (0.3) y despejando H_x :

$$H_x = \frac{x}{2\pi r^2} I \quad \text{A-vuelta/m}$$

De aquí la densidad de flujo a x metros del centro del conductor será:

$$B_x = \mu H_x = \frac{\mu x I}{2\pi r^2} \quad \text{Wb/m}^2$$

μ es la permeabilidad magnética del material.

En el elemento anular de espesor dx , el flujo es $d\phi = B_x A$, donde A es el área del elemento diferencial $A = dx \times \text{long.axial}$, y como la longitud axial es igual a 1 m, entonces $A = dx$ y $d\phi = B_x dx$.

De aquí tendremos:

$$d\phi = \frac{\mu x I}{2\pi r^2} dx \quad \text{Webers} \quad (0.5)$$

Los enlaces de flujo $d\lambda$ por metro de longitud, en el elemento anular, serán:

$$d\lambda = \frac{\pi x^2}{\pi r^2} d\phi = \frac{\mu I x^3}{2\pi r^4} dx \quad \text{Wb-vuelta / m}$$

De lo anterior tendremos:

$$\lambda_{\text{int}} = \int_0^r \frac{\mu I x^3}{2\pi r^4} dx$$

de donde finalmente

$$\lambda_{\text{int}} = \frac{\mu I}{8\pi} \quad \text{Wb-vuelta/m}.$$

En el sistema internacional de unidades $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \quad \text{H / m}$ y como además

$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$, entonces $\mu_r = 1$ y tendremos

$$\lambda_{\text{int}} = \frac{I}{2} \times 10^{-7} \quad \text{Wb-vuelta / m} \quad (0.6)$$

y de aquí

$$L_{\text{int}} = 1/2 \times 10^{-7} \quad \text{H / m} \quad (0.7).$$

Nos referimos a la inductancia por metro simplemente como inductancia.

INDUCTANCIA DEBIDA A ENLACES DE FLUJO EXTERNOS AL CONDUCTOR.

En referencia a la figura 2, calculemos los enlaces de flujo entre los puntos D_1 y D_2 . En el elemento tubular de espesor dx situado a una distancia de x metros del conductor, la intensidad de campo magnético es H_x y la FMM (fuerza magneto-motriz) alrededor del elemento diferencial será $2\pi H_x = I$.

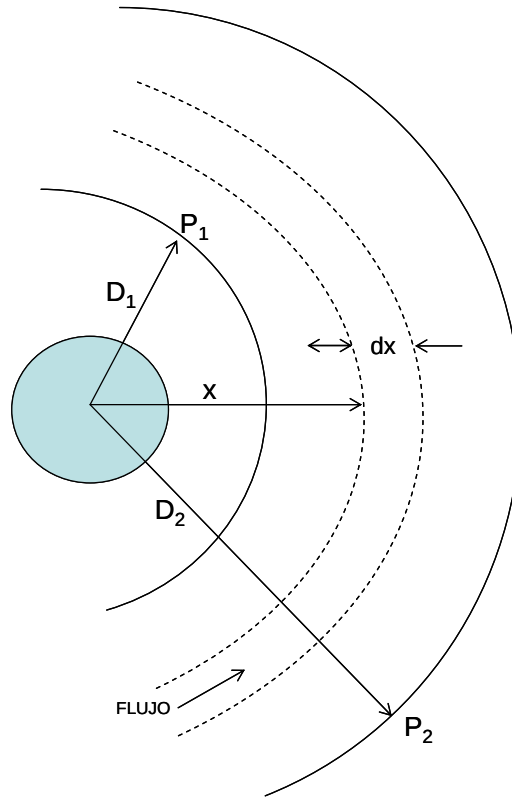


Figura 2. Enlaces de flujo magnético debidos a flujo externo.

Despejando de la última ecuación y recordamos que $B = \mu H$, obtenemos

$$H_x = \frac{I}{2\pi x}$$

$$B_x = \frac{\mu I}{2\pi x} \quad \text{Wb} / \text{m}^2$$

El flujo $d\phi$ en el elemento tubular de espesor diferencial será

$$d\phi = \frac{\mu I}{2\pi x} dx$$

donde $Area = dx \times lm$ y por otro lado $d\phi = d\lambda$, ya que el flujo completo enlaza solo una vez al conductor y entonces tendremos:

$$\lambda_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{\mu I}{2\pi x} dx = \frac{\mu I}{2\pi} Ln \frac{D_2}{D_1} \quad Wb - vuelta / m$$

para $\mu_r = 1$, tendremos

$$\lambda_{12} = 2 \times 10^{-7} Ln \frac{D_2}{D_1} \quad Wb - vuelta / m \quad (0.8).$$

Finalmente la inductancia debida al flujo enlazado entre los puntos P_1 y P_2 es:

$$L_{12} = 2 \times 10^{-7} Ln \frac{D_2}{D_1} \quad H / m \quad (0.9).$$

INDUCTANCIA DE UNA LINEA MONOFASICA.

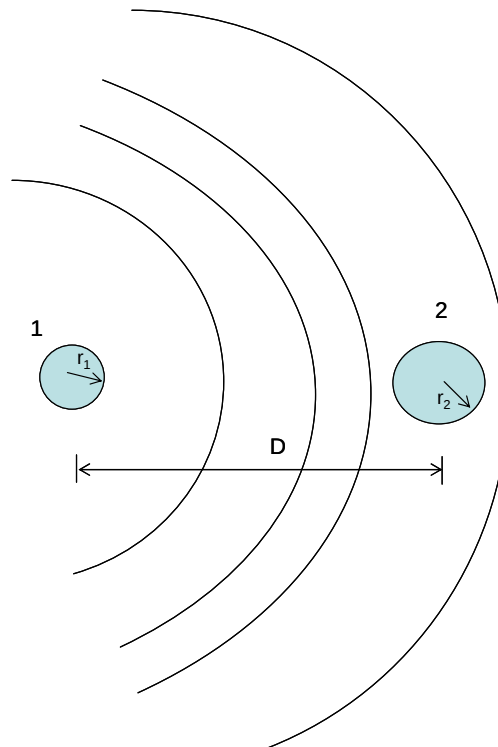


Figura 3. Inductancia de una línea monofásica.

Consideremos una línea monofásica como se muestra en la figura 3. Los conductores son sólidos y uno de ellos es el retorno del circuito. Sea I la corriente fluyendo en un conductor y $-I$ fluirá en el otro. Notamos que una línea de flujo a una distancia mayor ó igual a $D + r_2$ enlaza una corriente neta de valor cero y por lo tanto no induce voltaje. Por otro lado, el flujo entre r_1 y $D - r_2$ enlaza una corriente de valor I , mientras que entre $D - r_2$ y $D + r_2$, lo cual constituye la superficie del conductor, la fracción de corriente enlazada por el flujo varía de 1 a 0, desde $D - r_2$ hasta $D + r_2$, respectivamente.

Consideramos que D es mucho mayor que r_1 y r_2 , y que además la distribución de corriente es uniforme. Por otro lado suponemos que el flujo exterior producido en el conductor 1 y que se extiende hasta el centro del conductor 2 enlaza una corriente neta cero, podemos usar (0.9) para obtener para el caso presente:

$$L_{1,ext} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1} \quad H/m \quad (0.10).$$

Para el flujo interno:

$$L_{1,int} = \frac{1}{2} \times 10^{-7} \quad H/m$$

Con lo anterior la inductancia total del circuito, debida a la corriente en el conductor 1 será:

$$L_1 = \left(\frac{1}{2} + 2 \ln \frac{D}{r_1} \right) \times 10^{-7} \quad H/m \quad (0.11)$$

lo anterior puede escribirse como:

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \left(\frac{1}{4} + \ln \frac{D}{r_1} \right) = 2 \times 10^{-7} \left(\ln e^{\frac{1}{4}} + \ln \frac{D}{r_1} \right)$$

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1 e^{-\frac{1}{4}}}$$

Finalmente si definimos $r_1' = r_1 e^{-\frac{1}{4}} = 0.7788 r_1$, tendremos:

$$L_1 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_1'} \quad H/m \quad (0.12).$$

El flujo enlazado del conductor 2 será:

$$L_2 = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r_2} \quad H/m.$$

Para $\mu = \text{constante}$, las FMM de ambos conductores se suman, así como sus inductancias.

Para el circuito completo tendremos:

$$L = L_1 + L_2 = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{\sqrt{r_1' r_2'}} \quad H/m \quad (0.13)$$

En caso de que $r_1' = r_2' = r'$, la inductancia total se reduce a:

$$L = 4 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'} \quad H/m \quad (0.14).$$

La ecuación (0.14) nos da la inductancia debida a dos conductores, con uno actuando como retorno y se denomina *inductancia por metro de lazo*, para distinguirla de la inductancia atribuida a un solo conductor dada por la ecuación (0.12) y la cual es igual a la mitad de la inductancia dad por la ecuación (0.14).

ENLACES DE UN CONDUCTOR EN UN GRUPO.

Consideremos un grupo de conductores en el cual la suma de las corrientes es cero, tal como se muestra en la figura 4.

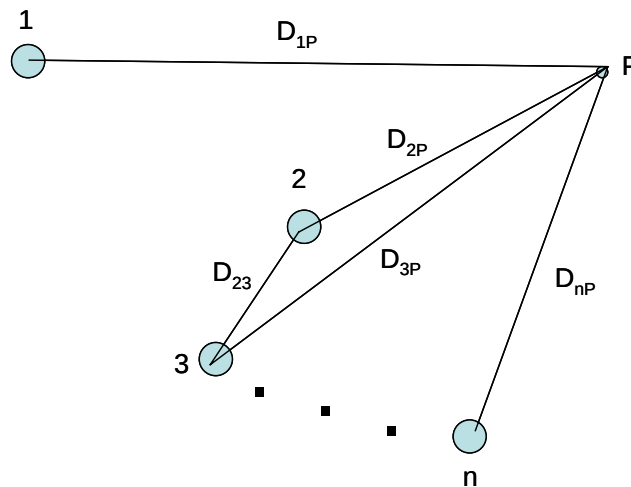


Figura 4. Enlaces de un conductor en un grupo.

Sean $I_1, I_2, \dots, I_n$ las corrientes que circulan en los respectivos conductores. Sea además λ_{1P1} , los encadenamientos de flujo del conductor 1 debidos a la corriente I_1 , incluyendo el flujo interno, pero excluyendo todo el flujo exterior a P.

De las ecuaciones (0.6) y (0.8):

$$\lambda_{1P1} = \left(\frac{I_1}{2} + 2 I_1 \operatorname{Ln} \frac{D_{1P}}{r_1} \right) \times 10^{-7} = 2 \times 10^{-7} I_1 \operatorname{Ln} \frac{D_{1P}}{r_1} \quad \text{Wb-vuelta/m}$$

Por otro lado, λ_{1P2} es el flujo que enlaza al conductor 1 y debido a la corriente I_2 , pero excluyendo el flujo después del punto P y está dado por:

$$\lambda_{1P2} = 2 \times 10^{-7} I_2 \operatorname{Ln} \frac{D_{2P}}{D_{12}}$$

Finalmente λ_{1Pn} es el flujo que enlaza al conductor 1 debido a I_n , la corriente fluyendo por el conductor n, y acotado por la distancia al punto P, el cual estará dado por:

$$\lambda_{1Pn} = 2 \times 10^{-7} I_n \operatorname{Ln} \frac{D_{nP}}{D_{1n}}$$

Si denotamos como λ_{1P} al flujo que enlaza al conductor 1 y debido a la corriente fluyendo en todos los conductores, pero excluyendo el flujo después del punto P, este será igual a la suma de los flujos antes mencionados, es decir

$$\lambda_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \operatorname{Ln} \frac{D_{1P}}{r_1} + I_2 \operatorname{Ln} \frac{D_{2P}}{D_{12}} + I_3 \operatorname{Ln} \frac{D_{3P}}{D_{13}} + \dots + I_n \operatorname{Ln} \frac{D_{nP}}{D_{1n}} \right) \quad (0.15)$$

lo anterior puede escribirse como sigue:

$$\lambda_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \operatorname{Ln} \frac{1}{r_1} + I_2 \operatorname{Ln} \frac{1}{D_{12}} + \dots + I_n \operatorname{Ln} \frac{1}{D_{1n}} + I_1 \operatorname{Ln} D_{1P} + I_2 \operatorname{Ln} D_{2P} + \dots + I_n \operatorname{Ln} D_{nP} \right)$$

pero tomando en cuenta que $I_1 + I_2 + \dots + I_n = 0$, tendremos $I_n = -(I_1 + I_2 + \dots + I_{n-1})$, podremos sustituir esta relación en la ecuación anterior con lo que obtenemos:

$$\lambda_{1P} = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \operatorname{Ln} \frac{1}{r_1} + I_2 \operatorname{Ln} \frac{1}{D_{12}} + \dots + I_n \operatorname{Ln} \frac{1}{D_{1n}} + I_1 \operatorname{Ln} \frac{D_{1P}}{D_{nP}} + I_2 \operatorname{Ln} \frac{D_{2P}}{D_{nP}} + \dots + I_{(n-1)} \operatorname{Ln} \frac{D_{(n-1)P}}{D_{nP}} \right)$$

Supongamos ahora que movemos el punto P a una distancia cada vez más

grande. En el límite, cuando el punto P se sitúa en el infinito, las razón $\frac{D_{iP}}{D_{nP}} \rightarrow 1$, con lo que $\ln \frac{D_{iP}}{D_{nP}} \rightarrow 0$.

Tomando en cuenta lo arriba expuesto en la última ecuación obtenemos finalmente para los enlaces de flujo asociados con el conductor 1:

$$\lambda_1 = 2 \times 10^{-7} \left(I_1 \ln \frac{1}{r_1} + I_2 \ln \frac{1}{D_{12}} + \dots + I_n \ln \frac{1}{D_{1n}} \right) \quad \text{Wb-vuelta / m} \quad (0.16).$$

La ecuación anterior es muy importante pues la usaremos en nuestro desarrollo posterior y expresa todos los enlaces de flujo del conductor 1 en un grupo de conductores, con la condición de que $\sum_{K=1}^n I_K = 0$.

INDUCTANCIA DE CONDUCTORES COMPUESTOS.

Consideremos dos conductores compuestos por un determinado número de filamentos como se muestra en la figura 5.

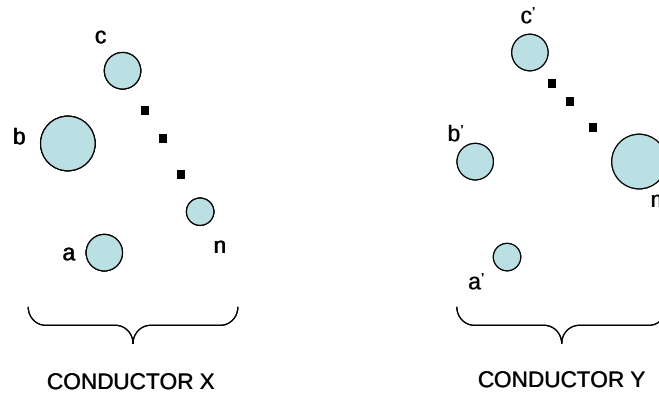


Figura 5. Conductores compuestos.

Como podemos observar, el conductor X está formado por n filamentos, mientras que el conductor Y lo está por m filamentos. Todos los filamentos son redondos e idénticos. Suponemos que la corriente se reparte de manera uniforme, de tal manera que ésta se reparte igualmente en todos los filamentos o torzaes, es decir, una corriente I/n en cada filamento del conductor X , mientras que $-I/m$ fluye en cada filamento del conductor Y .

Si hacemos uso de la ecuación (0.16) en el filamento a del conductor X obtenemos

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} \frac{I}{n} \left(Ln \frac{1}{r_a'} + Ln \frac{1}{D_{ab}} + \dots + Ln \frac{1}{D_{an}} \right) - 2 \times 10^{-7} \frac{I}{m} \left(Ln \frac{1}{D_{aa'}} + Ln \frac{1}{D_{ab'}} + \dots + Ln \frac{1}{D_{am}} \right)$$

por lo que

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} I Ln \frac{(D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{an'})^{(1/m)}}{(r_a' D_{ab} D_{ac} \dots D_{an})^{(1/n)}} \quad \text{Wb-vuelta / m} \quad (0.17)$$

Tomando en cuenta que $\lambda = Li$, dividimos (0.17) por I/n encontrando finalmente con esto la inductancia

$$L_a = \frac{\lambda_a}{(I/n)} = 2n \times 10^{-7} Ln \frac{(D_{aa'} D_{ab'} D_{ac'} \dots D_{an'})^{1/m}}{(r_a' D_{ab} D_{ac} \dots D_{an})^{1/n}} \quad \text{H / m} \quad (0.18)$$

De manera similar para el filamento b del mismo conductor obtenemos:

$$L_b = \frac{\lambda_b}{(I/n)} = 2n \times 10^{-7} Ln \frac{(D_{ba'} D_{bb'} D_{bc'} \dots D_{bm})^{1/m}}{(D_{ba} r_b' D_{ac} \dots D_{bn})^{1/n}} \quad \text{H / m} \quad (0.19)$$

Con la finalidad de calcular la inductancia del conductor X , definamos la inductancia promedio de éste como:

$$L_X = \frac{L_{prom}}{n} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n^2} L_{prom} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n} \quad (0.20)$$

Como el conductor X está formado por n filamentos en paralelo, podemos calcular fácilmente la inductancia de éste si consideramos la inductancia de cada filamento como igual a L_{prom} . El resultado de esto es:

$$L_X = \frac{L_{prom}}{n} = \frac{L_a + L_b + L_c + \dots + L_n}{n^2} \quad (0.21).$$

Sustituyendo las expresiones anteriores para las inductancias de los filamentos en esta última ecuación, obtenemos la expresión para L_X :

$$L_X = \left(1/n^2\right) 2n \times 10^{-7} \left[Ln \frac{(D_{aa'} D_{ab'} \dots D_{am})^{1/m}}{(r_a' D_{ab} D_{ac} \dots D_{an})^{1/n}} + Ln \frac{(D_{ba'} D_{bb'} \dots D_{bm})^{1/m}}{(D_{ba} r_b' D_{bc} \dots D_{bn})^{1/n}} + \dots + Ln \frac{(D_{na'} D_{nb'} \dots D_{nm})^{1/m}}{(D_{na} D_{nc} \dots r_n')^{1/n}} \right]$$

Sustituyendo $r_a', r_b', \dots$ por $D_{aa'}, D_{bb'}, \dots$ respectivamente, obtenemos finalmente

$$L_X = 2 \times 10^{-7} Ln \frac{[(D_{aa'} D_{ab'} \dots D_{am})(D_{ba'} D_{bb'} \dots D_{bm}) \dots (D_{na'} D_{nb'} \dots D_{nm})]^{1/mn}}{[(D_{aa} D_{ab} D_{ac} \dots D_{an})(D_{ba} D_{bb} D_{bc} \dots D_{bn}) \dots (D_{na} D_{nc} \dots D_{nn})]^{1/n^2}} \quad H/m \quad (0.22)$$

La expresión anterior da lugar a dos definiciones muy importantes. A la raíz mn del producto de las mn distancias, se le conoce como con el nombre de Distancia Media Geométrica ó *GMD* (por sus siglas en inglés); también algunos autores la denominan GMD mutua y se abrevia como GMD ó D_m . La raíz n^2 de estos términos se conoce como Radio Medio Geométrico *GMR* (por sus siglas en inglés), ó bien GMD propia ó simplemente D_s , como algunos autores lo denotan.

En términos de la definición anterior tenemos:

$$L_X = 2 \times 10^{-7} Ln \frac{D_m}{D_s} \quad H/m \quad (0.23).$$

Finalmente la inductancia del conductor Y se obtiene de manera similar, y con esto la inductancia de la línea será $L = L_X + L_Y$.

INDUCTANCIA DE UNA LINEA TRIFÁSICA.

Como un primer paso para el análisis de las líneas aéreas de transmisión trifásicas, consideremos la configuración que resulta de situar los conductores de fase en los vértices de un triángulo equilátero, es decir, una configuración en la que los conductores están equidistantes, como se muestra en la figura 6. Además no existe conductor neutro y se cumple que $I_a + I_b + I_c = 0$.

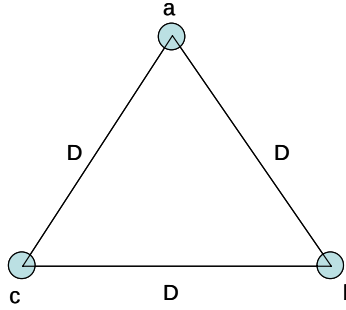


Figura 6. Línea trifásica equilátera.

Usando la ecuación (0.16) para el conductor a de esta configuración obtenemos

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D} + I_c \ln \frac{1}{D} \right)$$

la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + (I_b + I_c) \ln \frac{1}{D} \right) \quad \text{Wb-vuelta / m}$$

pero además tenemos que $I_a = -(I_b + I_c)$, por lo que

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} - I_a \ln \frac{1}{D} \right) = 2 \times 10^{-7} I_a \ln \frac{D}{r'} \quad \text{Wb-vuelta / m}$$

$$L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D}{r'} \quad H / m \quad (0.24).$$

Las ecuaciones para las fases b y c son iguales por simetría y la ecuación (0.24) nos define la inductancia de la línea por fase, para la línea trifásica con arreglo equidistante. La ecuación (0.24) es válida para el caso general si consideramos D_S en lugar de r' para el caso de conductores trenzados.

INDUCTANCIA DE UNA LINEA TRIFASICA CON ESPACIAMIENTO NO SIMETRICO.

En este caso el flujo enlazado y las inductancias de cada fase no son iguales. Sin embargo si observamos cuidadosamente, lo anterior se debe a que los cocientes de los logaritmos de la expresión de la inductancia, no son iguales. Lo anterior se resuelve si hacemos que cada fase ocupe las tres posiciones posibles en el trayecto de la línea de transmisión. Esto se puede lograr si dividimos la línea en tres secciones de igual longitud, y hacemos que cada conductor ocupe cada una de estas posiciones por espacios iguales, es decir, en el trayecto de cada sección de longitud $\ell/3$. En general, se puede dividir la línea en un número de secciones que sea múltiplo del número de fases, o sea tres para el caso trifásico, y haciendo que cada conductor ocupe las posiciones posibles un número de veces igual al múltiplo de tres en que se dividió la línea. Lo anterior se muestra en la figura 7, para el caso trifásico. Esta técnica se conoce como *transposición*.

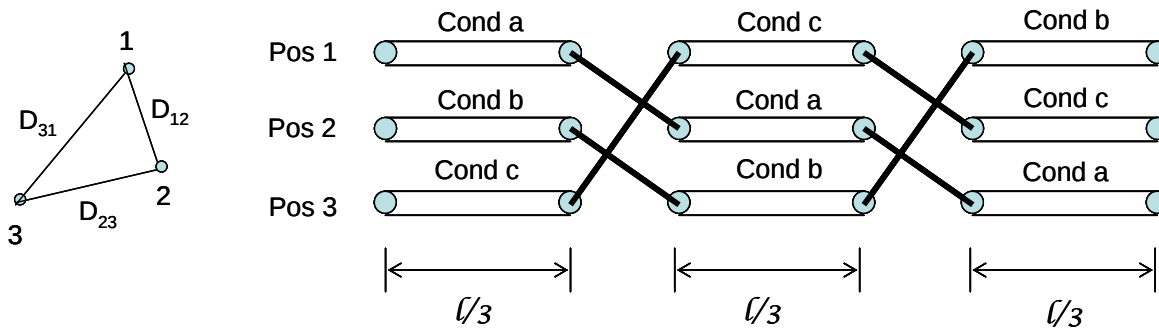


Figura 7. Transposición completa de una línea trifásica.

Determinaremos la inductancia promedio de la línea transpuesta, obteniendo los enlaces de flujo asociados con cada posición y promediándolos.

Para la primera sección de la línea tenemos:

$$\lambda_{a1} = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{12}} + I_c \ln \frac{1}{D_{13}} \right) \quad Wb - vuelta / m$$

Para la segunda sección obtenemos:

$$\lambda_{a2} = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{23}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12}} \right) \quad Wb - vuelta / m$$

Finalmente para la tercera sección

$$\lambda_{a3} = 2 \times 10^{-7} \left(I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{23}} \right) \quad Wb - vuelta / m$$

Los encadenamientos de flujo promedio, pertenecientes a la fase a , son:

$$\lambda_a = \frac{\lambda_{a1} + \lambda_{a2} + \lambda_{a3}}{3} = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left(3 I_a \ln \frac{1}{r'} + I_b \ln \frac{1}{D_{12} D_{23} D_{31}} + I_c \ln \frac{1}{D_{12} D_{23} D_{31}} \right).$$

Sin embargo recordemos que $I_a = -(I_b + I_c)$. Sustituyendo esta restricción encontramos:

$$\lambda_a = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left(3 I_a \ln \frac{1}{r'} - I_a \ln \frac{1}{D_{12} D_{23} D_{31}} \right).$$

Factorizando esta última ecuación llegamos a:

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} I_a \ln \frac{(D_{12} D_{23} D_{31})^{1/3}}{r'} \quad Wb - vuelta / m \quad (0.25)$$

Finalmente obtenemos

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{r'} \quad H / m \quad (0.26)$$

donde $D_{eq} = (D_{12} D_{23} D_{31})^{1/3}$.

Una forma común de escribir la ecuación (0.26) es: $L_a = 2 \times 10^{-7} \ln \frac{D_{eq}}{D_s}$. Aquí

D_s = GMR del conductor, mientras que D_{eq} = Media Geométrica de las distancias.

RADIO GEOMETRICO MEDIO DE UN HAZ DE CONDUCTORES.

Debido a la importancia de los haces de conductores en líneas de transmisión aéreas de EHV y UHV, nos ocuparemos a continuación del desarrollo de los conceptos y ecuaciones asociadas con el Radio Geométrico Medio de un haz de conductores.

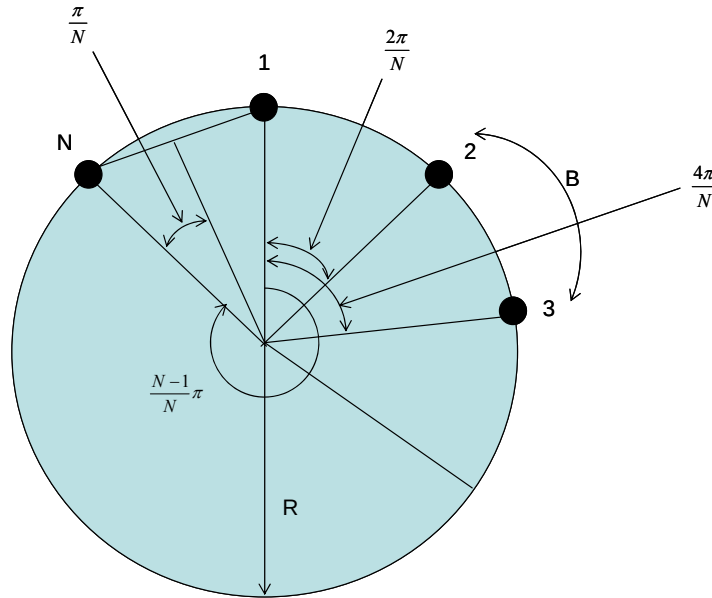


Figura 8. Haz de conductores.

En referencia a la figura 8, denominamos *espaciamiento del haz* al espaciamiento entre conductores adyacentes y lo denotaremos por B . Por otro lado, el radio del haz será denotado por R , mientras que el radio de los subconductores es r y su diámetro es d .

El ángulo formado en el centro por dos subconductores adyacentes es $(2\pi/N)$ radianes y se obtiene como sigue:

$$\frac{B}{2} = R \sin(\pi/N)$$

de donde obtenemos:

$$R = \frac{B}{2 \sin(\pi/N)}$$

El GMR se desarrolla a continuación; el producto de las $(N-1)$ distancias mutuas está dado por:

$$\left(2R \sin \frac{\pi}{N}\right) \left(2R \sin \frac{2\pi}{N}\right) \left(2R \sin \frac{3\pi}{N}\right) \dots \left(2R \sin \frac{N-1}{N} \pi\right) = (2R)^{N-1} \left(\sin \frac{\pi}{N}\right) \left(\sin \frac{2\pi}{N}\right) \dots \left(\sin \frac{N-1}{N} \pi\right)$$

de donde obtenemos:

$$GMR = D_s = \left[r (2R)^{N-1} \sin \frac{\pi}{N} \sin \frac{2\pi}{N} \dots \sin \frac{N-1}{N} \pi \right]^{1/N}.$$

A continuación se listan algunos casos obtenidos a partir de esta última ecuación.

Para $N=2$, haz de dos conductores:

$$GMR = (2rR)^{1/2}$$

Para $N=3$, haz de tres conductores:

$$GMR = \left(2^2 R^2 r \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{1/2} = (3rR^2)^{1/3}$$

Para $N=4$, haz de cuatro conductores:

$$GMR = \left(2^3 R^3 r \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{4} \sin \frac{3\pi}{4} \right)^{1/4} = (4rR^3)^{1/4}$$

Para $N=6$, haz de seis conductores:

$$GMR = \left(2^5 R^5 r \sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{6} \dots \sin \frac{5\pi}{6} \right)^{1/6} = (6rR^5)^{1/6}$$

En general tenemos:

$$GMR = (NrR^{N-1})^{1/N}.$$

LINEAS DE TRANSMISION DE DOBLE CIRCUITO.

Otro caso sumamente importante es el de líneas de transmisión de doble circuito. Por esto tratamos aquí explícitamente dicho caso, aunque con las bases proporcionadas hasta ahora, su análisis no resulta difícil, ni mucho menos novedoso.

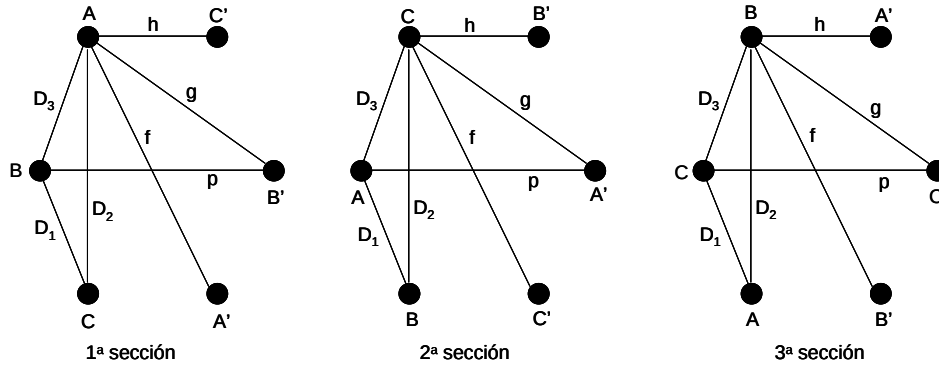


Figura 9. Línea de transmisión de doble circuito transpuesta.

Con referencia a la figura 9, consideremos la línea de doble circuito transpuesta. Aplicando los conceptos discutidos hasta ahora, obtendremos los enlaces de flujo asociados con las tres secciones de la línea mostradas en la figura 9.

Los enlaces de flujo de la 1ª sección:

$$\lambda_{a1} = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \left(Ln \frac{1}{r'} + Ln \frac{1}{f} \right) + I_b \left(Ln \frac{1}{D_3} + Ln \frac{1}{g} \right) + I_c \left(Ln \frac{1}{D_2} + Ln \frac{1}{h} \right) \right].$$

Los enlaces de la 2ª sección:

$$\lambda_{a2} = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \left(L_n \frac{1}{r'} + L_n \frac{1}{p} \right) + I_b \left(L_n \frac{1}{D_1} + L_n \frac{1}{g} \right) + I_c \left(L_n \frac{1}{D_3} + L_n \frac{1}{g} \right) \right].$$

Finalmente para la 3ª sección:

$$\lambda_{a3} = 2 \times 10^{-7} \left[I_a \left(L_n \frac{1}{r'} + L_n \frac{1}{f} \right) + I_b \left(L_n \frac{1}{D_2} + L_n \frac{1}{h} \right) + I_c \left(L_n \frac{1}{D_1} + L_n \frac{1}{g} \right) \right].$$

El flujo promedio para la fase a será: $\lambda_a = \frac{1}{3}(\lambda_{a1} + \lambda_{a2} + \lambda_{a3})$, por lo que sustituyendo las ecuaciones anteriores obtendremos:

$$\lambda_a = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left[I_a \left(3 L_n \frac{1}{r'} + L_n \frac{1}{f^2 p} \right) + I_b \left(L_n \frac{1}{D_1 D_2 D_3} + L_n \frac{1}{g^2 h} \right) + I_c \left(L_n \frac{1}{D_1 D_2 D_3} + L_n \frac{1}{g^2 h} \right) \right]$$

$$\lambda_a = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left[I_a \left(3 L_n \frac{1}{r'} + L_n \frac{1}{f^2 p} \right) + (I_b + I_c) \left(L_n \frac{1}{D_1 D_2 D_3} + L_n \frac{1}{g^2 h} \right) \right].$$

Sin embargo sabemos que $-I_a = I_b + I_c$, y por tanto

$$\lambda_a = \frac{2 \times 10^{-7}}{3} \left[I_a \left(3 L_n \frac{1}{r'} + L_n \frac{1}{f^2 p} \right) + I_a L_n (D_1 D_2 D_3 g^2 h) \right]$$

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} I_a \left[\left(L_n \frac{1}{r'} + L_n \frac{1}{(f^2 p)^{1/3}} \right) + L_n (D_1 D_2 D_3 g^2 h)^{1/3} \right]$$

factorizando obtenemos:

$$\lambda_a = 2 \times 10^{-7} I_a L_n \left[\left(\frac{(D_1 D_2 D_3)^{1/3}}{r'} \right) \left(\frac{g}{f} \right)^{2/3} \left(\frac{h}{p} \right)^{1/3} \right] \quad \text{Wb-vuelta/m}$$

Y de aquí finalmente

$$L_a = \frac{\lambda_a}{I_a} = 2 \times 10^{-7} \ln \left[\left(\frac{(D_1 D_2 D_3)^{1/3}}{r'} \right) \left(\frac{g}{f} \right)^{2/3} \left(\frac{h}{p} \right)^{1/3} \right] \quad H/m.$$

CAPACITANCIA.

CAMPO ELECTRICO Y VOLTAJE EN UN CONDUCTOR CILINDRICO SOLIDO.

Otro parámetro en la línea de transmisión es la capacitancia. Este parámetro modela el campo eléctrico que se establece entre los conductores de la línea de transmisión, y entre los conductores y tierra, y que es debido a la presencia de carga en dichos conductores.

La capacitancia entre conductores en un medio de permitividad constante ϵ se puede obtener como sigue:

1. A partir de la ley de Gauss obtenemos la intensidad de campo eléctrico E .
2. En función de la intensidad de campo eléctrico, obtenemos el voltaje entre conductores, y finalmente
3. Conocido el voltaje podemos obtener la capacitancia por unidad de voltaje ($C = q/V$).

Antes de seguir con el procedimiento indicado arriba, es importante mencionar que el método descrito no es el único, pero uno de los más usados. Para estudiar procedimientos alternativos, se sugiere al lector consultar los libros listados en la bibliografía.

La ley de Gauss establece que

$$\iint D \cdot ds = \iint \epsilon E \cdot ds = Q_{encerrada} \quad (27)$$

donde:

D: Densidad de flujo eléctrico

E: Intensidad de campo eléctrico

ds: Elemento diferencial de área.

Consideremos un conductor cilíndrico sólido, conductor perfecto, y el cual tiene una distribución uniforme de carga, tal como se muestra en la figura 10.

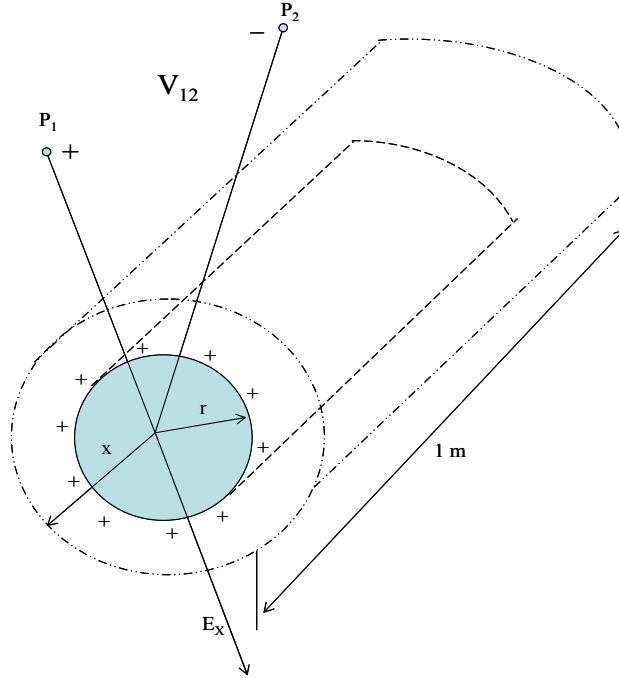


Figura 10. Conductor cilíndrico sólido.

En este punto haremos algunas suposiciones, sin comprometer de manera notoria la precisión de los resultados que vamos a obtener:

1. la longitud del conductor es suficientemente grande para despreciar los llamados efectos finales.
2. Supondremos un conductor perfecto, es decir, resistividad igual a cero, $\rho = 0$.

De acuerdo a la segunda suposición, la ley de Ohm nos permite concluir que el campo interior en el conductor es cero, dado por $E_{\text{int}} = \rho J = 0$ (flujo interno cero).

Considerando la superficie gaussiana formada por el cilindro de 1 metro de longitud de la figura 10 (mostrada con trazos punteados), vemos que existe no componente tangencial de $\mathbf{E}$ y que la componente radial E_x es constante. Tomando en cuenta las observaciones arriba mencionadas en la ecuación (0.27) obtendremos:

$$\epsilon E_x (2\pi x)(1) = Q$$

Y a partir de esta ecuación obtenemos

$$E_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon x} \quad V/m \quad (0.28)$$

donde $\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \quad F/m$ para conductores en el vacío.

Las superficies de potencial constante (superficies equipotenciales) son cilindros concéntricos al conductor. La diferencia de potencial entre dos cilindros concéntricos a distancias D_1 y D_2 está dada por:

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} E_x dx \quad (0.29)$$

sustituyendo (0.28) en (0.29)

$$V_{12} = \int_{D_1}^{D_2} \frac{Q}{2\pi\epsilon x} dx = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{D_2}{D_1} \quad \text{volts} \quad (0.30).$$

Este resultado, aunque restringido, es muy útil para obtener resultados más generales, lo cual haremos a continuación. Para esto consideremos un arreglo de M conductores cilíndricos como se muestra en la figura 11. Suponemos que cada conductor m tiene una carga de Q C/m uniformemente distribuida a lo largo del conductor.

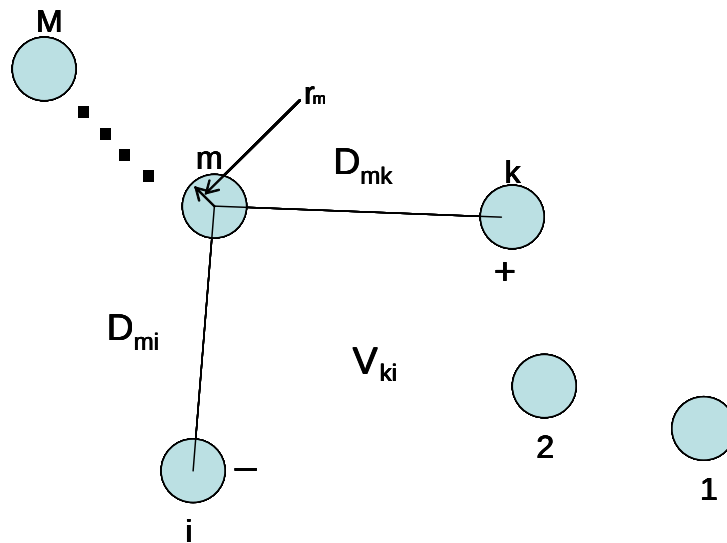


Figura 11. Arreglo de M conductores.

Sea V_{kim} el voltaje entre los conductores k e i debido a la carga q_m actuando sola. Entonces el valor de este voltaje estará dado por la ecuación

$$V_{kim} = \frac{1}{2\pi\epsilon} q_m \ln \frac{D_{mi}}{D_{mk}} \quad \text{volts} \quad (0.31)$$

aquí $D_{mm} = r_m$ cuando $k = m$ ó bien $i = m$.

Es importante notar que se ha despreciado la distorsión del campo eléctrico en la vecindad de otros conductores.

Usando el principio de superposición, el voltaje V_{ki} entre los conductores k e i debido a todas las cargas es

$$V_{ki} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{m=1}^M q_m \ln \frac{D_{mi}}{D_{mk}} \quad \text{voltios} \quad (0.32).$$

CAPACITANCIA DE UNA LINEA MONOFÁSICA.

Consideremos la línea monofásica mostrada en la figura 12.

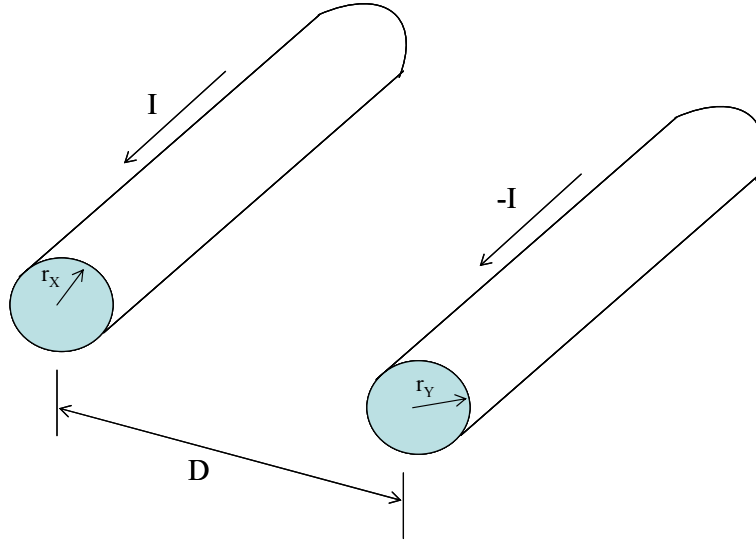


Figura 12. Línea monofásica.

El conductor x tiene una carga uniforme q C/m, y por conservación de carga, el conductor y tiene una carga $-q$ C/m. Usando la ecuación (0.32) con $k = x, i = y, m = x$:

$$V_{xy} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q \operatorname{Ln} \frac{D_{yx}}{D_{xx}} - q \operatorname{Ln} \frac{D_{yy}}{D_{xy}} \right] = \frac{q}{2\pi\epsilon} \operatorname{Ln} \frac{D_{yx} D_{xy}}{D_{xx} D_{yy}} \quad (0.33)$$

si usamos por otro lado, $D_{xy} = D_{yx} = D$, $D_{xx} = r_x$ y $D_{yy} = r_y$ tendremos:

$$V_{xy} = \frac{q}{\pi\epsilon} \operatorname{Ln} \frac{D}{\sqrt{r_x r_y}} \quad \text{voltios} \quad (0.34).$$

Finalmente para una línea de 1 metro de longitud, la capacitancia entre conductores será:

$$C_{xy} = \frac{q}{V_{xy}} = \frac{\pi\epsilon}{\operatorname{Ln} \frac{D}{\sqrt{r_x r_y}}} \quad F / m \text{ linea} - \text{linea} \quad (0.35).$$

Por otro lado, en caso de que $r_x = r_y = r$, tendremos:

$$C_{xy} = \frac{\pi\epsilon}{\operatorname{Ln} \frac{D}{r}} \quad F / m \text{ linea} - \text{linea} \quad (0.36).$$

LINEA TRIFASICA.

Consideremos la línea trifásica mostrada en la figura 13.

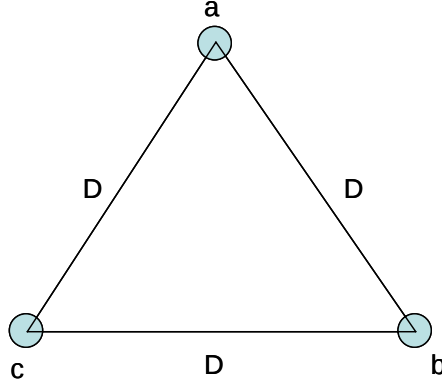


Figura 13. Línea de transmisión trifásica en disposición equilátera.

Suponemos, por ahora, que el efecto de tierra se desprecia y que no hay conductor neutro, por lo que $q_a + q_b + q_c = 0$ (cargas de secuencia positiva). Usando la ecuación (0.33) con $k = a$, $i = b$, $m = a, b, c$, el voltaje V_{ab} entre los conductores a y b es:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \operatorname{Ln} \frac{D_{ab}}{D_{aa}} + q_b \operatorname{Ln} \frac{D_{bb}}{D_{ab}} + q_c \operatorname{Ln} \frac{D_{bc}}{D_{ac}} \right]$$

con $D_{aa} = D_{bb} = r$ y $D_{ab} = D_{ba} = D_{ca} = D_{cb} = D$ tenemos:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \operatorname{Ln} \frac{D}{r} + q_b \operatorname{Ln} \frac{r}{D} + q_c \operatorname{Ln} \frac{D}{D} \right] \quad (0.37)$$

por lo que, dado que $\operatorname{Ln} 1 = 0$

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \operatorname{Ln} \frac{D}{r} + q_b \operatorname{Ln} \frac{r}{D} \right] \quad (0.37').$$

El tercer término $q_c \ln \frac{D}{D} = 0$ debido a que los conductores a y b son equidistantes del conductor c . Los conductores a y b están en un cilindro equipotencial para el campo eléctrico debido a q_c .

De manera similar de la ecuación (0.32) con $k = a, i = c, m = a, b, c$:

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \ln \frac{D_{ca}}{D_{aa}} + q_b \ln \frac{D_{cb}}{D_{ab}} + q_c \ln \frac{D_{cc}}{D_{ac}} \right]$$

en donde, debido a que $D_{bc} = D_{ab}$ y por lo tanto $\ln \frac{D}{D} = 0$, obtenemos:

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \ln \frac{D}{r} + q_c \ln \frac{r}{D} \right] \quad \text{voltios} \quad (0.38)$$

Por otro lado recordamos que:

$$V_{ab} = \sqrt{3} V_{an} \angle 30^\circ = \sqrt{3} V_{an} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right]$$

$$V_{ac} = -V_{ca} = \sqrt{3} V_{an} \angle -30^\circ = \sqrt{3} V_{an} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right]$$

de las expresiones anteriores:

$$V_{ab} + V_{ac} = 3V_{an} \quad (0.39)$$

de donde sustituyendo (0.37'), (0.38) en (0.39):

$$V_{an} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} \right) \left[2q_a \ln \frac{D}{r} + (q_b + q_c) \ln \frac{D}{D} \right]$$

pero dado que $q_b + q_c = -q_a$, sustituimos en la última ecuación y obtendremos:

$$V_{an} = \frac{1}{2\pi\epsilon} q_a \ln \frac{D}{r} \quad \text{voltios} \quad (0.40)$$

por lo que la capacitancia a neutro por longitud de línea será:

$$C_{an} = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D}{r}\right)} \quad F / m \quad \text{linea} - \text{neutro} \quad (0.41).$$

Además debido a la simetría del caso, se obtienen los mismos resultados para las otras fases:

$$C_{bn} = \frac{q_b}{V_{bn}} \quad C_{cn} = \frac{q_c}{V_{cn}}.$$

CAPACITANCIA DE UNA LINEA TRIFASICA CON ESPACIAMIENTO ASIMETRICO.

El resultado obtenido en la sección anterior, en el cual existe un desacoplamiento matemático en las expresiones de capacitancia, existe únicamente en la configuración tratada en esta sección, en la cual los conductores son equidistantes. Cualquier otra configuración conduce a una expresión imposible de simplificar en la forma como lo hicimos antes, lo cual está asociado con expresiones para la capacitancia en las cuales existe un acoplamiento matemático, producto de la asimetría de la configuración.

Una solución a este problema, la cual no se efectúa muy a menudo en la práctica actualmente por múltiples razones, es la transposición completa de los conductores, la cual fue discutida en el caso de la inductancia. El resultado de la transposición es el mismo que en el caso de la inductancia, o sea, eliminar la asimetría causada por el hecho de que las distancias entre conductores son diferentes, y se lleva a cabo bajo el principio de que cada conductor ocupa las tres (en el caso trifásico) diferentes posiciones posibles, por secciones de la misma longitud.

Con el fin de efectuar el análisis correspondiente al caso, nos referimos a la figura 14.

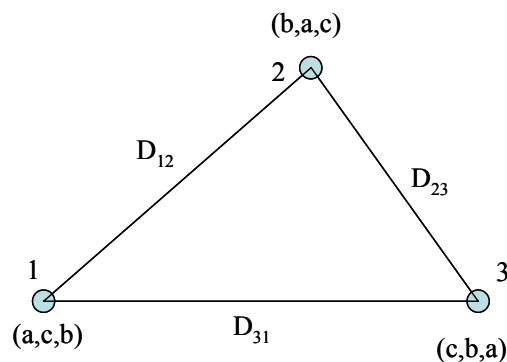


Figura 14. Transposición completa de una línea trifásica.

Partimos de una línea completamente transpuesta, y para la primera sección del ciclo de transposición tenemos:

$$V_{ab1} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_{a1} \ln \frac{D_{12}}{r} + q_{b1} \ln \frac{r}{D_{12}} + q_{c1} \ln \frac{D_{23}}{D_{13}} \right] \quad (0.42)$$

Para la segunda sección de transposición:

$$V_{ab2} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_{a2} \ln \frac{D_{23}}{r} + q_{b2} \ln \frac{r}{D_{23}} + q_{c2} \ln \frac{D_{31}}{D_{12}} \right] \quad (0.43)$$

finalmente para la tercera sección de transposición:

$$V_{ab3} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_{a3} \ln \frac{D_{31}}{r} + q_{b3} \ln \frac{r}{D_{31}} + q_{c3} \ln \frac{D_{12}}{D_{23}} \right] \quad (0.44).$$

Si despreciamos la caída de voltaje en cada sección, V_{ab} será igual en todo el ciclo de transposición. Se pueden escribir tres ecuaciones para $V_{bc} = V_{ab} \angle -120^\circ$ y tres ecuaciones más que igualen a cero la suma de las cargas en cada sección del ciclo de transposición. Con esto obtenemos 9 ecuaciones en 9 incógnitas cuya solución nos conduce a la obtención de las 9 cargas q_{ai}, q_{bi}, q_{ci} para $i=1,2,3$. Lo anterior, aunque posible, es muy complicado y optamos por una alternativa diferente para obtener la solución.

Supondremos, sin menoscabo de la validez de este análisis, que :

$$q_{a1} = q_{a2} = q_{a3} \quad q_{b1} = q_{b2} = q_{b3} \quad q_{c1} = q_{c2} = q_{c3} \quad (0.45).$$

la solución se puede simplificar si hacemos uso del valor promedio de V_{ab} :

$$V_{ab(\text{promedio})} = \frac{1}{3} (V_{ab1} + V_{ab2} + V_{ab3})$$

tomando en cuenta la ecuación (0.45) obtenemos:

$$V_{ab} = \frac{1}{6\pi\epsilon} \left[q_a \operatorname{Ln} \left(\frac{D_{12}D_{23}D_{31}}{r^3} \right) + q_b \operatorname{Ln} \left(\frac{r^3}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right) + q_c \operatorname{Ln} \left(\frac{D_{12}D_{23}D_{31}}{D_{12}D_{23}D_{31}} \right) \right].$$

Notar que el argumento del último término logarítmico de esta ecuación es igual a uno, por lo que esta expresión se reduce a:

$$V_{ab} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(q_a \operatorname{Ln} \frac{D_{eq}}{r} + q_b \operatorname{Ln} \frac{r}{D_{eq}} \right) \quad (0.46)$$

donde $D_{eq} = (D_{12}D_{23}D_{31})^{1/3}$.

De manera similar podemos obtener V_{ac} , que resulta:

$$V_{ac} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \operatorname{Ln} \frac{D_{eq}}{r} + q_c \operatorname{Ln} \frac{r}{D_{eq}} \right] \quad (0.47)$$

si sumamos las ecuaciones (0.46) y (0.47): $V_{ab} + V_{ac} = 3V_a$, y además $(q_b + q_c) = -q_a$, lo cual conduce a:

$$3V_{an} = V_{ab} + V_{ac} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(2q_a \operatorname{Ln} \frac{D_{eq}}{r} - q_a \operatorname{Ln} \frac{r}{D_{eq}} \right) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(3q_a \operatorname{Ln} \frac{D_{eq}}{r} \right)$$

de donde obtenemos

$$V_{an} = \frac{q_a}{2\pi\epsilon} \operatorname{Ln} \frac{D_{eq}}{r} \quad (0.48)$$

de aquí que la capacitancia de línea a neutro de la línea transpuesta será:

$$C_{an} = \frac{q_a}{V_{an}} = \frac{2\pi\epsilon}{\operatorname{Ln} \frac{D_{eq}}{r}} \quad F / m \text{ a neutro} \quad (0.49).$$

LINEA TRIFASICA CON HACES DE CONDUCTORES.

En esta sección, analizaremos una línea de transmisión trifásica con haces de dos conductores por fase. Suponemos que las cargas q_a , q_b , y q_c son las cargas de las fases y que cumplen la condición: $q_a + q_b + q_c = 0$. Además suponemos que cada conductor de fase (a y a' por ejemplo) tiene una carga igual a la mitad de la carga por fase ($q_a/2$ en fase a). Por otro lado haremos la suposición de que los espaciamentos entre fases son mucho mayores que los espaciamentos entre los conductores del haz, por ejemplo, $(D_{ab} - d)$ o $(D_{ab} + d) = D$.

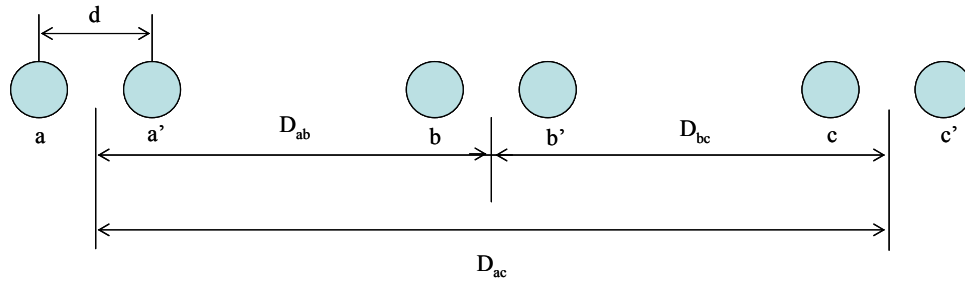


Figura 15. Línea trifásica con conductores en haz.

Con referencia a la figura 15, usando la ecuación (0.32) con $k = a$, $i = b$, $m = a, a', b, b', c, c'$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\frac{q_a}{2} \text{Ln} \frac{D_{ab}}{D_{aa}} + \frac{q_a}{2} \text{Ln} \frac{D_{ab'}}{D_{aa'}} + \frac{q_b}{2} \text{Ln} \frac{D_{bb}}{D_{ab}} + \frac{q_b}{2} \text{Ln} \frac{D_{bb'}}{D_{ab'}} + \frac{q_c}{2} \text{Ln} \frac{D_{bc}}{D_{ac}} + \frac{q_c}{2} \text{Ln} \frac{D_{bc'}}{D_{ac'}} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\frac{q_a}{2} \text{Ln} \left(\frac{D_{ab}}{r} + \frac{D_{ab}}{d} \right) + \frac{q_b}{2} \text{Ln} \left(\frac{r}{D_{ab}} + \frac{d}{D_{ab}} \right) + \frac{q_c}{2} \text{Ln} \left(\frac{D_{bc}}{D_{ac}} + \frac{D_{bc}}{D_{ac}} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[q_a \text{Ln} \frac{D_{ab}}{\sqrt{rd}} + q_b \text{Ln} \frac{\sqrt{rd}}{D_{ab}} + q_c \text{Ln} \frac{D_{bc}}{D_{ac}} \right] \quad (0.50)
 \end{aligned}$$

Es interesante observar que si sustituimos D_{aa} , D_{bb} por $\sqrt{rd}$ en (0.33), obtenemos la ecuación (0.50).

De acuerdo con lo anterior, para una línea transpuesta, la derivación de la capacitancia de secuencia positiva y negativa, sería similar a la asociada con la ecuación (0.33) y resultaría

$$C_1 = C_2 = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{D_{eq}}{D_{sc}}\right)} \quad F/m \quad (0.51)$$

donde: $D_{sc} = \sqrt{rd}$, para un haz de dos conductores.

De manera similar, $D_{sc} = (rd)^{1/3}$ para un haz de tres conductores, y $D_{sc} = 1.091(rd^3)^{1/4}$ para un haz de cuatro conductores.

CORRIENTE CAPACITIVA Y POTENCIA REACTIVA.

La corriente suministrada a la capacitancia de la línea será denominada corriente capacitiva, a falta de un término más adecuado; lo anterior debido a que en inglés dicha corriente se denomina “charge current”, pero la traducción literal no es muy apropiada, en opinión del autor.

Para un circuito monofásico operando aun voltaje de línea a línea con valor $V_{xy} = |V_{xy}| \angle 0^\circ$:

$$I_c = Y_{xy} V_{xy} = j\omega C_{xy} V_{xy} \quad Amp \quad (0.52)$$

y la potencia reactiva:

$$Q_C = \frac{V_{xy}^2}{X_C} = Y_{xy} V_{xy}^2 = \omega C_{xy} V_{xy}^2 \quad (0.54).$$

Para una línea trifásica transpuesta con voltajes $V_{an} = |V_{an}| \angle 0^\circ$ en fase α :

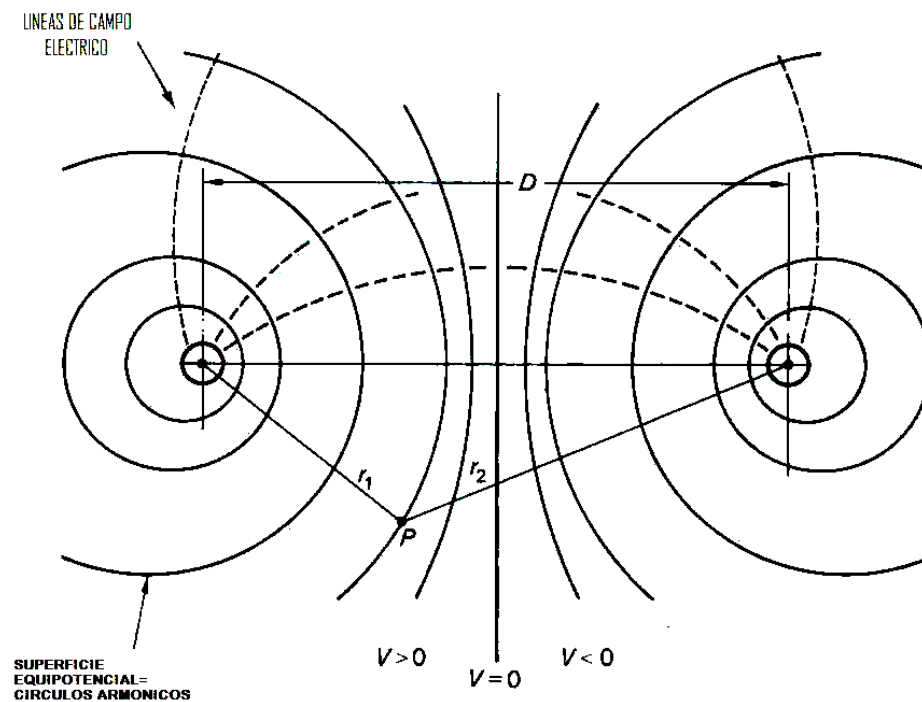
$$I_c = Y V_{an} = j\omega C_1 V_{LN} \quad Amp \quad (0.55)$$

$$Q_{c1\phi} = Y V_{an}^2 = \omega C_1 V_{LN}^2 \quad var \quad (0.56)$$

$$Q_{c3\phi} = 3 Q_{c1\phi} = 3 \omega C_1 V_{LN}^2 = \omega C_1 V_{LL}^2 \quad var \quad (0.57)$$

EFFECTO DE TIERRA.

Si observamos la ecuación (0.30), vemos que si el argumento del logaritmo permanece constante, el potencial entre dos puntos en el espacio también será constante, es decir, todos los puntos del espacio donde la razón (D_2/D_1) , (r_2/r_1) en la gráfica, permanece constante. El lugar geométrico descrito por la condición mencionada lo constituyen las curvas mostradas, las cuales se denominan *círculos armónicos*. Estas representan las superficies equipotenciales alrededor de la línea. En este caso no hay ningún otro conductor en la vecindad, lo cual incluye por supuesto a tierra.



Campo eléctrico y superficies equipotenciales alrededor de una línea

En la figura anterior se muestra el caso mencionado arriba. El campo eléctrico lo representan las líneas punteadas y son perpendiculares a las superficies equipotenciales.

La presencia de tierra distorsiona las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales y con esto el valor de la capacitancia deberá cambiar, con respecto al obtenido por los procedimientos usados anteriormente.

Consideremos que el efecto de tierra puede tomarse en cuenta aproximando la tierra como un plano conductor horizontal de extensión infinita.

En los cursos de Teoría Electromagnética se estudia el *método de las imágenes*, generalmente con relación a un dipolo. Aquí será aplicado en la solución del problema de incluir el efecto de tierra en el cálculo de la capacitancia en derivación de la línea.

La figura 16 muestra las líneas de campo eléctrico que se originan en una carga positiva, el conductor de la línea, y terminan en el plano de tierra perpendicularmente.

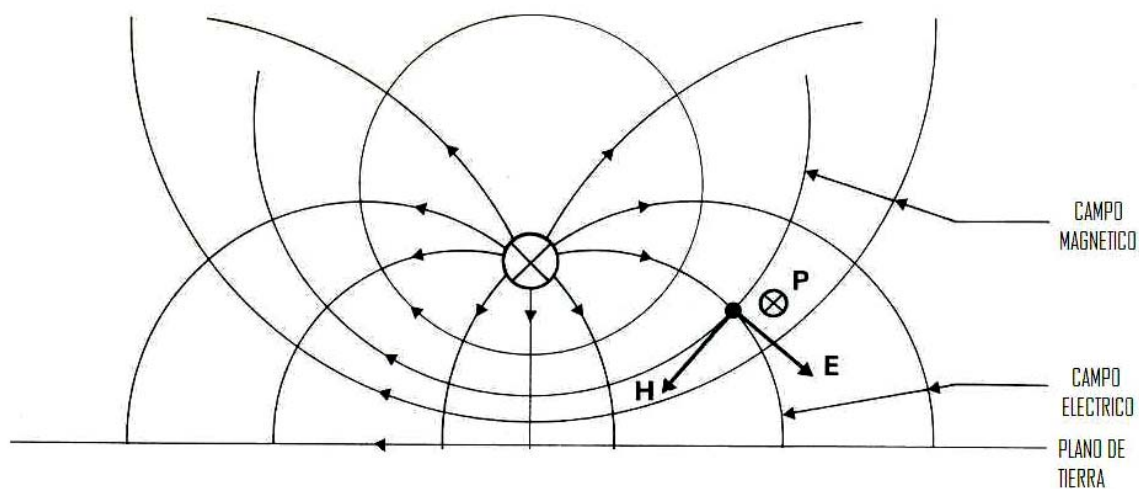


Figura 16. Efecto del plano de tierra en el campo eléctrico de un conductor.

Reemplazamos ahora la tierra por un conductor del mismo radio que el original y situado directamente debajo de este y con signo contrario al original, tal como se muestra en la figura 17.

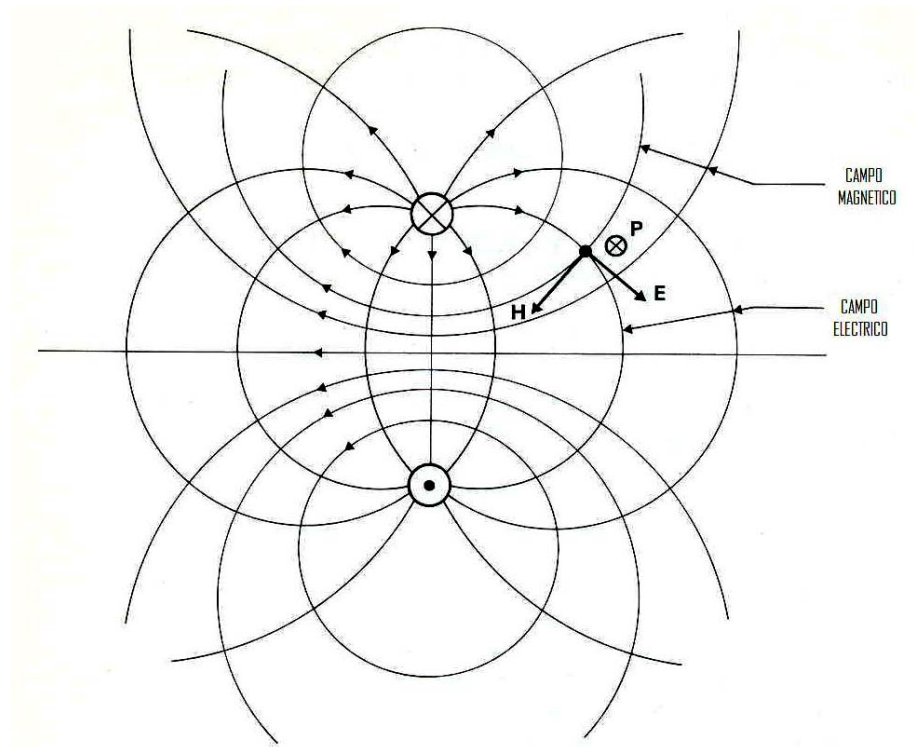


Figura 17. Método de las imágenes.

Se puede observar de la figura 17, que podemos quitar el plano de tierra sin que el patrón de líneas de campo eléctrico se altere; por tanto el efecto de tierra se puede simular a través de la carga de signo contraria agregada, la cual se denomina carga imagen.

Aplicamos este método al caso de una línea monofásica, lo cual se muestra en la figura 18.

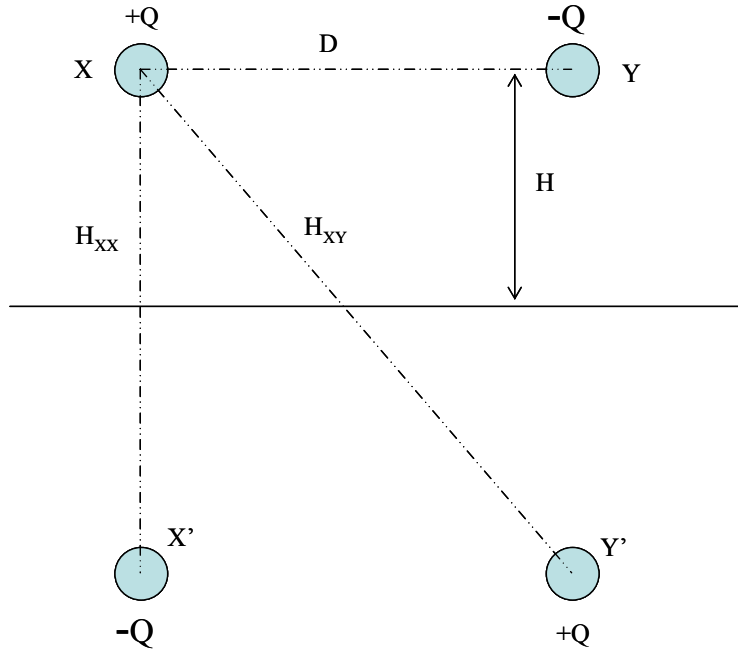


Figura 18. Efecto de tierra en una línea monofásica.

De la ecuación (0.32) obtenemos el voltaje entre conductores:

$$\begin{aligned}
 V_{xy} &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{D_{xy}}{D_{xx}} - \ln \frac{D_{yy}}{D_{xy}} - \ln \frac{H_{yx}}{H_{xx}} + \ln \frac{H_{yy}}{H_{xy}} \right] \\
 &= \frac{q}{2\pi\epsilon} \left[\ln \frac{D_{yx} D_{xy}}{D_{xx} D_{yy}} - \ln \frac{H_{yx} H_{xy}}{H_{xx} H_{yy}} \right] \\
 &= \frac{q}{\pi\epsilon} \left[\ln \frac{D}{r} - \ln \frac{H_{xy}}{H_{xx}} \right].
 \end{aligned}$$

De aquí la capacitancia de línea a línea será:

$$C_{xy} = \frac{q}{V_{xy}} = \frac{\pi\epsilon}{\ln \frac{D}{r} - \ln \frac{H_{xy}}{H_{xx}}} \quad F/m \quad (0.58)$$

EFFECTO DE TIERRA: LINEA TRIFASICA.

Consideremos una línea trifásica con N conductores neutros (hilos de guarda), como se muestra en la figura 19.

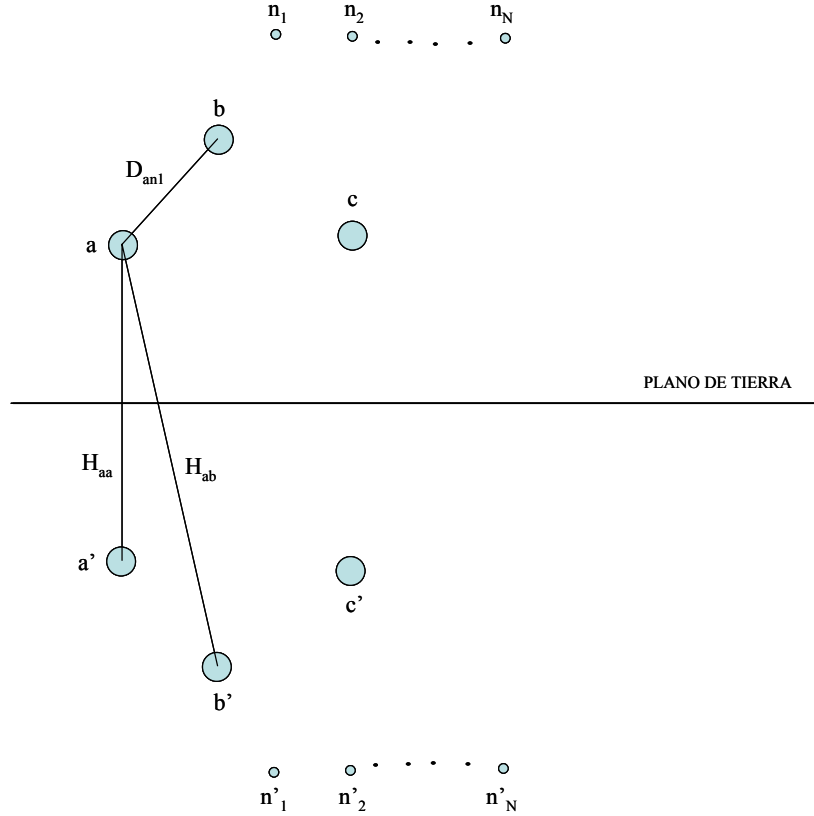


Figura 19. Línea trifásica con hilos de guarda y efecto de tierra.

Los conductores $a, b, c, n_1, n_2, \dots, n_{nN}$ conducen cargas $q_a, q_b, q_c, q_{n1}, \dots, q_{nN}$, respectivamente; mientras que los conductores $a', b', c', n'_1, n'_2, \dots, n'_N$ conducen cargas $-q_a, -q_b, -q_c, -q_{n1}, \dots, -q_{nN}$.

Aplicando la ecuación (0.32) se determina el voltaje entre el conductor k y su imagen k' :

$$\begin{aligned}
 V_{kk'} &= \frac{1}{2\pi\epsilon} \left[\sum_{m=a}^{nN} q_m \ln \frac{H_{km}}{D_{km}} - \sum_{m=a}^{nN} q_m \ln \frac{D_{km}}{H_{km}} \right] \\
 &= \frac{2}{2\pi\epsilon} \sum_{m=a}^{nN} q_m \ln \frac{H_{km}}{D_{km}} \quad (0.59).
 \end{aligned}$$

El voltaje entre el conductor k y tierra, V_{kn} , será ala mitad de $V_{kk'}$:

$$V_{kn} = \frac{1}{2}V_{kk'} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{m=a}^{nN} q_m \ln \frac{H_{km}}{D_{km}} \quad (0.60)$$

donde:

$$k = a, b, c, n_1, n_2, \dots, n_N$$

$$m = a, b, c, n_1, n_2, \dots, n_N$$

Por otro lado, todos los conductores está aterrizados y por lo tanto:

$$V_{kn} = 0 \quad \text{para } k = n_1, n_2, \dots, n_N \quad V_{kn} = 0 \quad \text{para } k = a, b, c, n_1, n_2, \dots, n_N \quad (0.61).$$

Si desarrollamos (0.60) y (0.61) y escribimos el resultado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{aa} & P_{ab} & P_{ac} & P_{an1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{anN} \\ P_{ba} & P_{bb} & P_{bc} & P_{bn1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{bnN} \\ P_{ca} & P_{cb} & P_{cc} & P_{cn1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{cnN} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{nNa} & P_{nNb} & P_{nNc} & P_{nNn1} & \cdot & \cdot & \cdot & P_{nNnN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_a \\ q_b \\ q_c \\ q_{n1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ q_{nN} \end{bmatrix} \quad (0.62)$$

La matriz de coeficientes $\mathbf{P}$ es de orden $(3+N) \times (3+N)$ y sus elementos están dados por:

$$P_{km} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \ln \frac{H_{km}}{D_{km}} \quad m / F \quad (0.63)$$

donde:

$$k = a, b, c, n_1, n_2, \dots, n_N$$

$$m = a, b, c, n_1, n_2, \dots, n_N$$

La ecuación (0.62) se puede escribir en forma particionada:

$$\begin{bmatrix} \underline{V}_P \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_A & P_B \\ P_C & P_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{q}_P \\ \underline{q}_n \end{bmatrix} \quad (0.64)$$

$\mathbf{V_P}$: vector de (3x1) de voltajes de fase a neutro

$\mathbf{q_P}$: vector de (3x1) de cargas de conductor de fase

$\mathbf{q_P}$: vector de (Nx1) de cargas de conductores de fase

$\mathbf{P}$: matriz de (3+N)x(3+N) y se particiona en las matrices:

$\mathbf{P_A}$: (3x3)

$\mathbf{P_B}$: (3xN)

$\mathbf{P_C}$: (Nx3)

$\mathbf{P_D}$: (NxN)

La ecuación (0.64) se puede escribir:

$$\underline{V_P} = P_A \underline{q_P} + P_B \underline{q_n} \quad (0.65)$$

$$\underline{0} = P_C \underline{q_P} + P_D \underline{q_n} \quad (0.66).$$

Despejamos $\mathbf{q_n}$ en (0.66) y sustituimos en (0.65) para obtener:

$$\underline{q_n} = -P_D^{-1} P_C \underline{q_P} \quad (0.67)$$

sustituyendo (0.67) en (0.65) y factorizando:

$$\underline{V_P} = \left(P_A - P_B P_D^{-1} P_C \right) \underline{q_P} \quad (0.68)$$

Escrito de manera compacta:

$$\underline{q_P} = C_P \underline{V_P} \quad (0.69)$$

donde:

$$C_P = \left(P_A - P_B P_D^{-1} P_C \right)^{-1} \quad \text{F/m} \quad (0.69')$$

La ecuación (0.69) relaciona cargas de conductores de fase con voltajes de fase a neutro. De acuerdo con esto $\mathbf{C_P}$ es una matriz de (3x3) de capacitancias de fase cuyos elementos se denotan:

$$C_P = \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} & C_{ac} \\ C_{ba} & C_{bb} & C_{bc} \\ C_{ca} & C_{cb} & C_{cc} \end{bmatrix} \quad \text{F/m} \quad (0.70)$$

$\mathbf{C_P}$ es una matriz cuyos elementos diagonales son positivos y los de fuera de la diagonal son negativos. Lo anterior está de acuerdo con el hecho de que cuando se aplica un voltaje de fase a neutro positivo en una de las fases, se induce carga positiva en esa fase y por otro lado se inducen cargas negativas en las otras fases.

En general $\mathbf{C_P}$ no satisface las condiciones para una matriz de capacitancias simétrica. Sin embargo, si la línea es transpuesta, los elementos diagonales y fuera de la diagonal de $\mathbf{C_P}$ se promedian y obtendremos:

$$\hat{\mathbf{C}}_P = \begin{bmatrix} \hat{C}_{aa} & \hat{C}_{ab} & \hat{C}_{ab} \\ \hat{C}_{ab} & \hat{C}_{aa} & \hat{C}_{ab} \\ \hat{C}_{ab} & \hat{C}_{ab} & \hat{C}_{aa} \end{bmatrix} F/m \quad (0.71)$$

donde:

$$\hat{C}_{aa} = \frac{1}{3}(C_{aa} + C_{bb} + C_{cc}) \quad F/m$$

$$\hat{C}_{ab} = \frac{1}{3}(C_{ab} + C_{bc} + C_{ac}) \quad F/m$$

Podemos obtener aquí la matriz de admitancia en derivación:

$$\mathbf{Y}_P = j\omega\mathbf{C}_P = j(2\pi f)\mathbf{C}_P \quad S/m \quad (0.72)$$

o para línea transpuesta:

$$\hat{\mathbf{Y}}_P = j\omega\hat{\mathbf{C}}_P = j(2\pi f)\hat{\mathbf{C}}_P \quad S/m \quad (0.73)$$

Se puede también obtener representación de circuito de las capacitancias de una línea transpuesta derivadas antes. Dicha representación se muestra enseguida

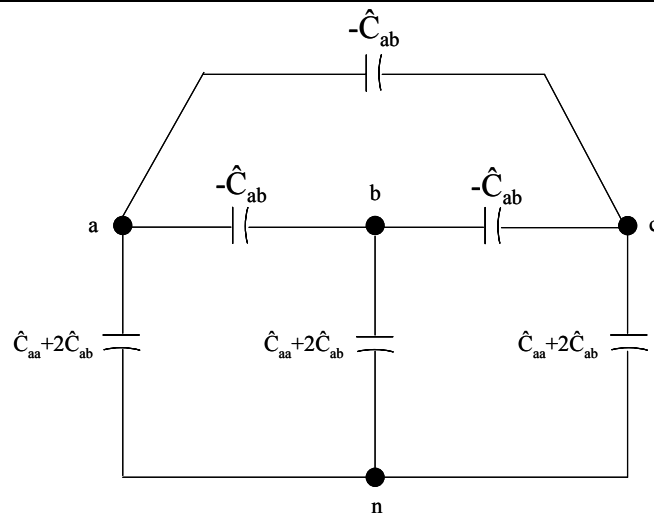


Figura 20. Representación de circuito de las capacitancias de una línea.

OPERACION DE LA LINEA DE TRANSMISION EN ESTADO ESTABLE.

En la secciones anteriores se obtuvieron fórmulas y metodologías para calcular los parámetros de la línea de transmisión aérea. En lo que resta, analizaremos el comportamiento en estado estable de la línea de transmisión.

Es común modelar a la línea como una red de dos puertos, por lo que determinaremos sus parámetros correspondientes de red de dos puertos, demás se introducirán los conceptos de potencia natural (SIL) y el concepto de cargabilidad.

Históricamente se han definido tres modelos de la línea de transmisión aérea, supone el autor que eso se debió a que hace años, quizás muchos para las presentes generaciones, no se disponía de herramientas de cálculo, como disponemos ahora, por lo que era imprescindible que se usaran simplificaciones que facilitaran los cálculos. Esto condujo a la definición de tres modelos de línea que aún en la actualidad pueden usarse en algunos tipos de estudios. Estos modelos se discutirán a continuación.

APROXIMACIONES DE LINEA CORTA Y MEDIA.

Presentamos el primer modelo de línea de transmisión. Este modelo es válido, es decir, proporciona buenos resultados en el caso de que la longitud de la línea no exceda 80 Km. Cuando nos referimos a buenos resultados, significa que son resultados con una exactitud suficientemente buena, para que no invaliden los cálculos que se efectúan usando dicho modelo.

En este modelo, denominado *modelo de línea corta*, se desprecian la resistencia en serie, lo cual supone que la línea está caracterizada por una razón X/R muy grande, o sea el valor de R es muy pequeño comparado con el de X . Esta suposición es correcta en líneas de transmisión aérea en alto voltaje. Además se desprecia también la admitancia capacitiva en derivación. Sin embargo como algunos autores incluyen la resistencia serie en este modelo, nosotros la incluiremos con el fin de que el modelo sea lo más general.

Brevemente exponemos las características principales de una red de dos puertos.



Figura 21. Red de dos puertos.

La relación entre las variables de envío y de recepción está dado por:

$$\begin{aligned} V_S &= AV_R + BI_R && \text{voltios} \\ I_S &= CV_R + DI_R && \text{amp} \end{aligned} \quad (1)$$

en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (2)$$

Los parámetros A, B, C, D dependen de los parámetros R, L y C de la línea, y en general son complejos. A y D son adimensionales y B tiene unidades de ohm, mientras que C unidades de Siemens.

En redes bilaterales, lineales, pasivas de dos puertos, se cumple que:

$$AD - BC = 1 \quad (3).$$

La figura 0.22 representa una línea de transmisión corta ($\ell \leq 80$ Km.). Como se puede observar se incluyen únicamente los parámetros serie.

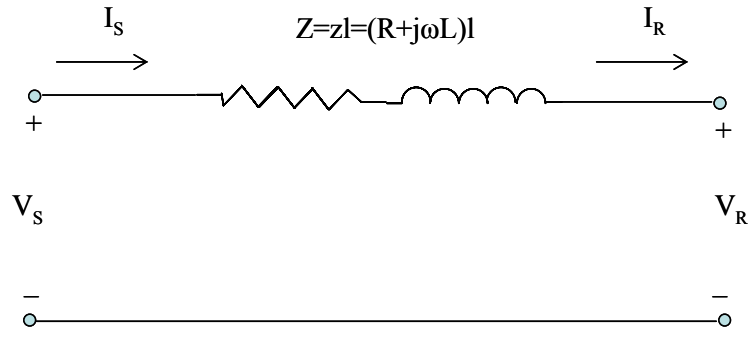


Figura 22. Modelo de línea corta.

Definimos las siguientes variables:

$z = R + j\omega L \quad \Omega/m$, impedancia serie por unidad de longitud

$y = G + j\omega C \quad S/m$, admitancia en derivación por unidad de longitud

$Z = zl \quad \Omega$, impedancia serie total

$Y = yl \quad S$, admitancia en derivación total

$$\%RV = \frac{|V_{R0}| - |V_R|}{|V_R|} \times 100 \quad l = \text{longitud de la línea } m.$$

Para obtener los parámetros ABCD para este modelo de línea corta aplicamos LVK (Ley de Voltajes de Kirchhoff) y LCK (Ley de Corrientes de Kirchhoff) al circuito de la figura 2:

$$V_S = V_R + Z I_R \quad (4)$$

$$I_S = I_R \quad (5)$$

lo cual en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (6)$$

Si comparamos (6) con (2) resulta que:

$$A = D = 1 \quad p.u.$$

$$B = Z \quad \Omega$$

$$C = 0 \quad S.$$

Si la longitud de la línea supera los 80 Km., pero no rebasa los 250 Km., es decir, $80 \leq \ell \leq 250$ Km., la admitancia capacitiva en derivación no puede despreciarse, aunque aún la consideración de parámetros concentrados no hace diferencia importante aún en los

cálculos y entonces estas consideración es nos conducen a otro modelo de línea de transmisión, el *modelo de línea media*. Es decir, el modelo de línea media se caracteriza por considerar los parámetros de la línea que representan todos los efectos que se presentan en el proceso de transmisión, pero sin tomar en cuenta el efecto distribuido en dichos parámetros. Esto nos conduce a un equivalente de circuito que se denomina *circuito π nominal*, y que se muestra en la figura 23.

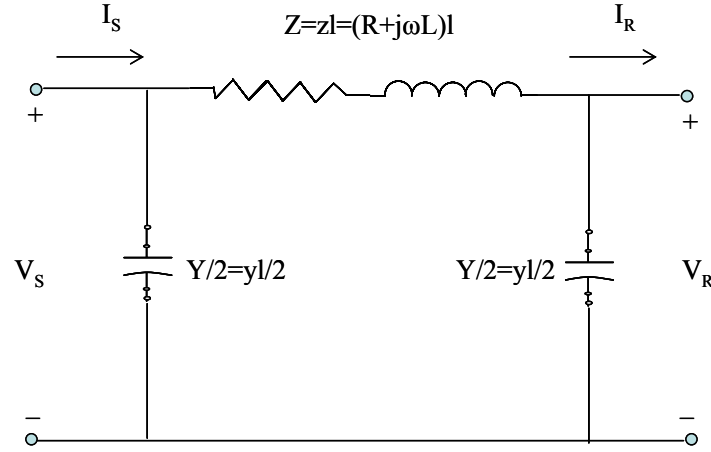


Figura 23. Circuito π nominal.

La corriente en la rama serie es:

$$V_S = V_R + Z \left(I_R + \frac{V_R Y}{2} \right) = \left(1 + \frac{YZ}{2} \right) V_R + Z I_R \quad (7)$$

Aplicando LCK en puerto de envío:

$$I_S = \left(I_R + \frac{V_R Y}{2} \right) + \frac{V_S Y}{2} \quad (8)$$

Por lo que sustituyendo (7) en (8):

$$I_S = I_R + \frac{V_R Y}{2} + \left[\left(1 + \frac{YZ}{2} \right) V_R + Z I_R \right] \frac{Y}{2}$$

lo cual conduce a:

$$I_S = Y \left(1 + \frac{YZ}{4} \right) V_R + \left(1 + \frac{YZ}{2} \right) I_R \quad (9).$$

Lo anterior escrito matricialmente resulta:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{YZ}{2}\right) & Z \\ Y\left(1 + \frac{YZ}{4}\right) & \left(1 + \frac{YZ}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (10).$$

Comparando con la ecuación (2) encontramos las constantes ABCD:

$$A = D = 1 + \frac{YZ}{2} \quad p.u.$$

$$B = Z \quad \Omega$$

$$C = Y\left(1 + \frac{YZ}{4}\right) \quad S.$$

Los parámetros ABCD pueden utilizarse para describir la variación de voltaje asociado con la carga.

Regulación de voltaje. Se define como el cambio de voltaje en el extremo de recepción de la línea cuando la carga varía de condición de vacío a plena carga a un factor de potencia especificado, mientras el voltaje en el extremo de envío se mantiene constante.

$$\%RV = \frac{|V_{R0}| - |V_R|}{|V_R|} \times 100$$

donde:

$\%RV$: Regulación de voltaje

$|V_R|$: magnitud de voltaje de recepción a plena carga

$|V_{R0}|$: magnitud de voltaje de recepción a plena carga.

Ecuaciones diferenciales de la línea de transmisión.

Cuando la línea excede los 250 Km. de longitud, los efectos distribuidos de la línea, ya no pueden despreciarse. Una diferencia importante entre las características de sistemas, en general, que son representados por parámetros concentrados y parámetros distribuidos, consiste en que en el primer caso, la respuesta en la salida del sistema, debida a un estímulo aplicado en la entrada del sistema, aparece instantáneamente, mientras que en el segundo no ocurre lo anterior, es decir, en el caso de parámetros distribuidos, la respuesta a la salida toma un tiempo para aparecer. La referencia en estos casos es la longitud de onda, es decir, si la dimensión, en general, del sistema es grande con respecto a la longitud de onda de la excitación, entonces el efecto distribuido de los parámetros, no puede despreciarse. Así por ejemplo, en el caso de la línea de transmisión con longitud superior a los 250 Km. la longitud de onda, cuyo valor se encontrará más adelante, dicta que los efectos distribuidos deben tomarse en cuenta. Pero por ejemplo en el caso de un circuito integrado, las pistas, que pueden tener milímetros o pocos centímetros de longitud, representan una longitud suficiente para tomar en cuenta el efecto distribuido de los parámetros, tomando en cuenta que la frecuencia de la señal está en el rango de los HMS. Igualmente, para estudios de transitorios electromagnéticos en que se encuentran fenómenos de diversas frecuencias, que van de los Khz. hasta los HMS, dispositivos eléctricos de dimensiones pequeñas, relativamente, tendrán que modelarse tomando en cuenta el efecto distribuido de sus parámetros.

Desarrollamos el modelo de la línea tomando en cuenta parámetros distribuidos, para lo cual hacemos referencia a un elemento diferencial de la línea, como se muestra en la figura 0.24. Note que la longitud crece del punto de recepción, $x = 0$, hacia el punto de envío, $x = \ell$.

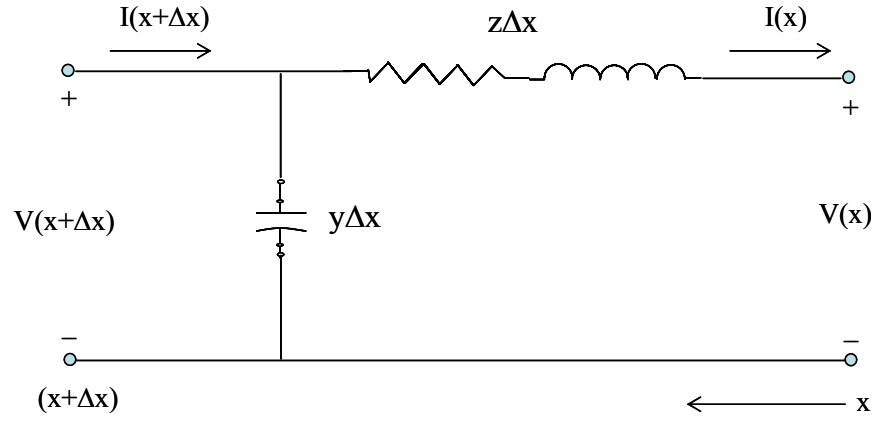


Figura 24. Elemento diferencial de línea.

Las constantes del circuito son:

$$z = R + j\omega L \quad \Omega / m$$

$$y = j\omega C \quad S / m$$

Si aplicamos LVK al circuito de la figura 4, obtenemos:

$$V(x + \Delta x) = V(x) + (z\Delta x)I(x) \quad \text{voltios} \quad (13)$$

de aquí:

$$zI(x) = \frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x}$$

si tomamos el límite $\Delta x \rightarrow 0$ y aplicamos la definición de derivada, obtenemos

$$\frac{dV(x)}{dx} = zI(x) \quad (14).$$

Aplicamos ahora LCK al mismo circuito de la figura 4:

$$I(x + \Delta x) = I(x) + (y\Delta x)V(x + \Delta x) \quad (15)$$

De la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{I(x + \Delta x) - I(x)}{\Delta x} = yV(x + \Delta x).$$

Tomando el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ obtenemos:

$$\frac{dI(x)}{dx} = yV(x) \quad (16).$$

Las ecuaciones diferenciales mostradas en las ecuaciones (14) y (16) constituyen el modelo de la línea, denominado *modelo de línea larga*. Dichas ecuaciones no se resuelven fácilmente en la forma que presentan actualmente, debido a que están acopladas matemáticamente. Una forma más apropiada se puede obtener si las desacoplamos. El proceso de desacoplamiento es muy simple y se muestra a continuación.

Eliminamos $I(x)$ diferenciando (14) y sustituyendo (16) en el resultado:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = z \frac{dI(x)}{dx} = zyV(x)$$

de donde

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} - zyV(x) = 0 \quad (17)$$

La solución de esta ecuación diferencial de 2^o orden homogénea es:

$$V(x) = A_1 e^{\gamma x} + A_2 e^{-\gamma x} \quad \text{voltios} \quad (18)$$

donde:

A_1 y A_2 son constantes de integración

$$\gamma = \sqrt{zy} \quad m^{-1} \quad (19)$$

γ se denomina *constante de propagación*.

Sustituyendo (18) en (14) obtenemos

$$I(x) = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{Z_c} \frac{dV(x)}{dx} = \gamma A_1 e^{\gamma x} - \gamma A_2 e^{-\gamma x} = zI(x)$$

de donde obtenemos la solución para la corriente

$$I(x) = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{z/\gamma}.$$

De la ecuación (19):

$$z/y = \frac{z}{\sqrt{zy}} = \sqrt{\frac{z}{y}}.$$

Definimos entonces:

$$Z_C = \sqrt{\frac{z}{y}} \quad \Omega \quad (20),$$

impedancia característica de la línea.

Por lo tanto obtenemos

$$I(x) = \frac{A_1 e^{\gamma x} - A_2 e^{-\gamma x}}{Z_C} \quad (21).$$

Evaluamos A_1 y A_2 a partir de condiciones iniciales: $V_R = V(0)$, $I_R = I(0)$.

También si evaluamos las ecuaciones (18) y (21) para $x = 0$, obtenemos dos ecuaciones simultáneas, que nos permiten encontrar A_1 y A_2 :

$$\begin{aligned} V_R &= A_1 + A_2 \\ I_R &= \frac{A_1 - A_2}{Z_C} \end{aligned} \quad (22)$$

de donde obtenemos:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{V_R + Z_C I_R}{2} \\ A_2 &= \frac{V_R - Z_C I_R}{2} \end{aligned} \quad (23).$$

Sustituyendo (23) y (22) en (18) y (21):

$$V(x) = \left(\frac{V_R + Z_C I_R}{2} \right) e^{\gamma x} + \left(\frac{V_R - Z_C I_R}{2} \right) e^{-\gamma x} \quad (24)$$

$$I(x) = \left(\frac{V_R + Z_C I_R}{2Z_C} \right) e^{\gamma x} + \left(\frac{V_R - Z_C I_R}{2Z_C} \right) e^{-\gamma x} \quad (25).$$

Factorizando estas dos últimas ecuaciones obtenemos, una forma matemática más adecuada de expresar los voltajes y corrientes anteriores:

$$e^{\gamma l} = e^{(\alpha l + j\beta l)} = e^{\alpha l} e^{j\beta l} = e^{\alpha l} \angle \beta l \quad V(x) = \left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R + Z_C \left(\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R \quad (26)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_C} \left(\frac{e^{\gamma x} - e^{-\gamma x}}{2} \right) V_R + \left(\frac{e^{\gamma x} + e^{-\gamma x}}{2} \right) I_R \quad (27).$$

Usando las identidades de Euler encontramos que:

$$V(x) = \cosh(\gamma x) V_R + Z_C \sinh(\gamma x) I_R \quad (28)$$

$$I(x) = \frac{1}{Z_C} \sinh(\gamma x) V_R + \cosh(\gamma x) I_R \quad (29).$$

De estas últimas ecuaciones obtenemos los parámetros ABCD:

$$\begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde:

$$A(x) = D(x) = \cosh(\gamma x) \quad p.u.$$

$$B(x) = Z_C \sinh(\gamma x) \quad \Omega \quad (30')$$

$$C(x) = \frac{1}{Z_C} \sinh(\gamma x) \quad S$$

En el extremo de envío, $x = l$, $V(l) = V_S$ e $I(l) = I_S$, lo que resulta en:

$$\begin{bmatrix} V_S \\ I_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_R \\ I_R \end{bmatrix} \quad (31)$$

donde:

$$A(l) = D(l) = \cosh(\gamma l) \quad p.u.$$

$$B(l) = Z_C \sinh(\gamma l) \quad \Omega \quad (31')$$

$$C(l) = \frac{1}{Z_C} \sinh(\gamma l) \quad S$$

La constante de propagación en (31') es compleja y se define:

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad m^{-1} \quad (32).$$

Observar que γl es adimensional y

$$e^{\gamma l} = e^{(\alpha l + j\beta l)} = e^{\alpha l} e^{j\beta l} = e^{\alpha l} \angle \beta l \quad (33).$$

INTERPRETACIONES DE LAS ECUACIONES DE LINEA LARGA.

Los resultados obtenidos hasta este punto, no dan una idea clara del fenómeno físico, y resulta imprescindible para un ingeniero comprender el fenómeno desde un punto de vista más real. Lo anterior se debe a que las ecuaciones en término fasoriales son prácticas en cuanto al cálculo se refiere, pero la mencionada visión física se dará únicamente si tenemos la información en el dominio del tiempo.

Para esto debemos escribir las ecuaciones obtenidas arriba en función del tiempo, siguiendo los conceptos de la definición de fasor. Para esto empezamos recordando la definición de $\gamma = \alpha + j\beta$, la constante de propagación. Las componentes de esta constante son, α : constante de atenuación, y β : constante de fase.

Empezamos escribiendo la ecuación (24) como

$$V(x) = \left| \frac{V_R + Z_C I_R}{2} \right| e^{\alpha x} e^{j(\beta x + \phi_1)} + \left| \frac{V_R - Z_C I_R}{2} \right| e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x - \phi_2)} \quad (34)$$

donde

$$\phi_1 \angle (V_R + I_R Z_C) \quad \phi_2 \angle (V_R - I_R Z_C)$$

Por lo que el voltaje instantáneo se podrá escribir como sigue:

$$v_x(t) = \Re e \left\{ \sqrt{2} \left| \frac{V_R + Z_C I_R}{2} \right| e^{\alpha x} e^{j(\omega t + \beta x + \phi_1)} + \sqrt{2} \left| \frac{V_R - Z_C I_R}{2} \right| e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x - \phi_2)} \right\} \quad (35).$$

Vemos que el voltaje instantáneo consiste de dos términos, cada uno de los cuales es una función de dos variables, distancia y tiempo. Entonces representan ondas viajeras. Si consideramos que el voltaje instantáneo se compone de:

$$v_x = v_{x1} + v_{x2} \quad (36),$$

podemos analizar cada componente por separado y ver como se comportan. Empezamos analizando v_{x1} , donde

$$v_{x1} = \sqrt{2} \left| \frac{V_R + Z_C I_R}{2} \right| e^{\alpha x} \cos(\omega t + \beta x + \phi_1) \quad (37).$$

Observamos que para cualquier tiempo, v_{x1} es una onda distribuida senoidalmente a lo largo de la línea, con amplitud creciente exponencialmente a partir del punto de envío ($\alpha > 0$ para línea con resistencia distinta de cero).

Después de un tiempo Δt , v_{x1} ha avanzado una distancia $\frac{\omega \Delta t}{\beta}$. A esta onda se le denomina *onda incidente*, debido a que se mueve de punto de envío a punto de recepción. La figura 25 muestra lo anterior.

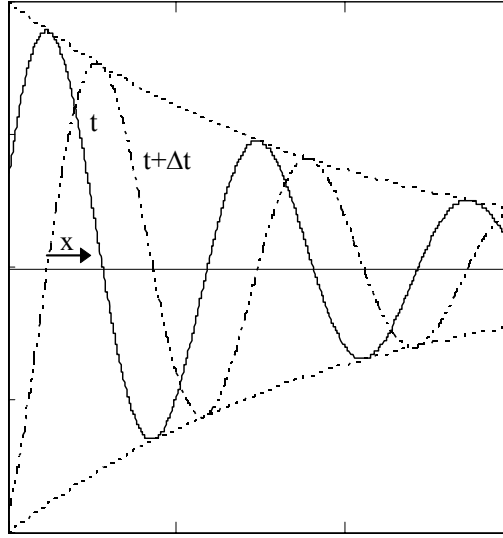


Figura 25. Onda incidente.

Por otro lado, para el caso de la segunda componente, v_{x2} , vemos que después de un tiempo Δt la onda se retarda un tiempo $\frac{\omega \Delta t}{\beta}$, por lo que la onda se mueve en el sentido contrario a la onda incidente, es decir del punto de recepción al punto de envío, por lo que se denomina a esta *onda reflejada*. Esta onda senoidalmente distribuida, por

supuesto, muestra atenuación en el sentido de viaje, debido a la presencia de resistencia diferente de cero en la línea. La figura 26 muestra lo anterior.

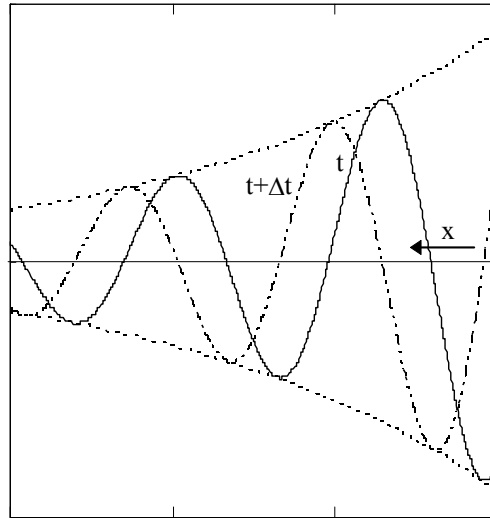


Figura 26. Onda reflejada.

CIRCUITO π EQUIVALENTE.

Además de los parámetros ABCD para el modelo de línea larga, es conveniente también desarrollar un circuito con configuración π asociado a dicho modelo de línea, principalmente con el objeto de obtener funciones que nos permitan estimar las diferencias de valores entre este modelo y el modelo de la línea media, al cual está asociado el denominado circuito π nominal. Este circuito π asociado con el modelo de línea larga se denomina *circuito π equivalente*, por razones obvias. Dicho circuito con sus parámetros asociados se muestra en la figura 27.

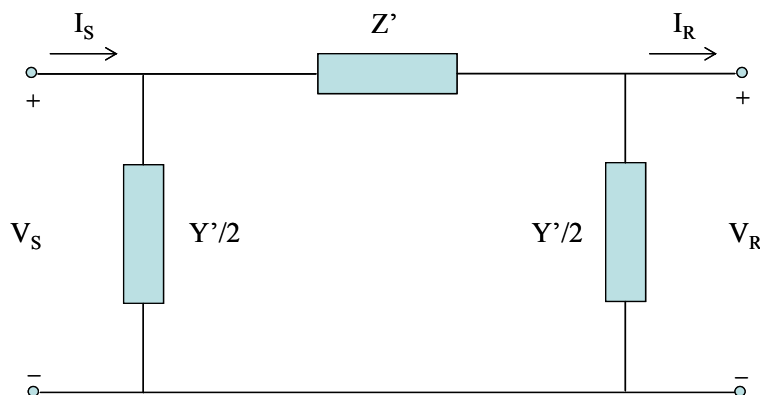


Figura 27. Circuito π equivalente.

Con referencia al circuito de la figura 27, vemos que las ecuaciones obtenidas en el modelo de línea media, usando el circuito π nominal, son válidas en el caso del circuito de dicha figura, nada más tomando en cuenta que los parámetros en el presente caso son diferentes, distinguidos a través de la comilla superior. Por tanto, basados en lo anterior, los parámetros ABCD, serán:

$$\begin{aligned} A = D &= 1 + \frac{Y'Z'}{2} \quad p.u. \\ B &= Z' \quad \Omega \\ C &= Y' \left(1 + \frac{Y'Z'}{4} \right) \quad S \end{aligned} \quad (38)$$

Iguando (30') con (38) obtenemos:

$$Z' = Z_c \sinh(\gamma l) = \sqrt{\frac{z}{y}} \sinh(\gamma l) \quad (39).$$

Planteando esta última ecuación en términos de la impedancia $Z = zl$ del circuito π nominal:

$$Z' = zl \left[\sqrt{\frac{z}{y}} \frac{\sinh(\gamma l)}{zl} \right] = zl \left[\frac{\sinh(\gamma l)}{l \sqrt{zy}} \right] = ZF_1 \quad \Omega \quad (40)$$

donde:

$$F_1 = \frac{\sinh(\gamma l)}{\gamma l} \quad p.u. \quad (40').$$

De igual forma, tenemos que

$$1 + \frac{Y'Z'}{2} = \cosh(\gamma l)$$

de donde:

$$\frac{Y'}{2} = \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{Z'}.$$

Además

$$\tanh(\gamma l/2) = \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{\sinh(\gamma l)},$$

haciendo uso de (39) obtendremos

$$\frac{Y'}{2} = \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{Z_c \sinh(\gamma l)} = \frac{\tanh(\gamma l/2)}{Z_c} = \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\sqrt{\frac{z}{y}}}.$$

Escribiendo en términos de la admitancia del circuito π nominal $Y = yl$:

$$\frac{Y'}{2} = \frac{yl}{2} \left[\frac{\tanh(\gamma l/2)}{\sqrt{\frac{z}{y}} \frac{yl}{2}} \right] = \frac{yl}{2} \left[\frac{\tanh(\gamma l/2)}{\sqrt{zy} l/2} \right]$$

$$\frac{Y'}{2} = \frac{Y}{2} F_2 \quad (41)$$

donde:

$$F_2 = \frac{\tanh(\gamma l/2)}{\gamma l/2} \quad p.u. \quad (41').$$

Las ecuaciones (40') y (41') nos dan los factores de corrección F_1 y F_2 para convertir Z y Y del circuito π nominal a Z' y Y' del circuito π equivalente.

LINEA SIN PÉRDIDAS.

Para el caso de línea sin pérdidas, con el fin de poder analizar importantes conceptos, se analizarán: impedancia natural (surge impedance), parámetros ABCD, circuito π equivalente, longitud de onda, potencia natural (SIL), perfiles de voltaje, límite de estabilidad en estado estable.

Impedancia característica. Para línea sin pérdidas, $R = G = 0$ y

$$z = j\omega L \quad \Omega/m$$

$$y = j\omega C \quad S/m.$$

Sustituyendo en (19) y (20):

$$Z_c = \sqrt{\frac{z}{y}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \Omega$$

$$\gamma = \sqrt{zy} = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} = j\beta \quad \text{m}^{-1}$$

donde $\beta = \omega\sqrt{LC} \quad \text{m}^{-1}$

Z_c es real para el caso de línea sin pérdidas. Z_c se denomina, para el caso sin pérdidas, impedancia natural (surge impedance en inglés). γ es imaginaria pura.

Parámetros ABCD.

Los parámetros ABCD, para línea sin pérdidas son, de (31')

$$A(x) = D(x) = \cosh(\gamma x) = \cosh(j\beta x) \quad (42)$$

$$= \frac{e^{j\beta x} + e^{-j\beta x}}{2} = \cos(\beta x) \quad \text{pu}$$

Por otro lado:

$$\sinh(\gamma x) = \sinh(j\beta x) = \frac{e^{j\beta x} - e^{-j\beta x}}{2} = j \sin(\beta x) \quad \text{pu}$$

De acuerdo con lo anterior:

$$B(x) = Z_c \sinh(\gamma x) = jZ_c \sin(\beta x) = j\sqrt{\frac{L}{C}} \sin(\beta x) \quad \Omega \quad (43)$$

$$C(x) = \frac{\sinh(\gamma x)}{Z_c} = \frac{j \sin(\beta x)}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \text{S} \quad (44)$$

$A(x)$ y $D(x)$: reales; $B(x)$ y $C(x)$: imaginarios puros.

Para el circuito π equivalente, usando (39):

$$Z' = Z_c \sinh(\gamma l) = jZ_c \sin(\beta l) = jx' \quad \Omega$$

ó bien de (40) y (40'):

$$Z' = (j\omega Ll) \left(\frac{\sin(\beta l)}{\beta l} \right) = jx' \quad \Omega \quad (45).$$

También de (41) y (41'):

$$\begin{aligned} \frac{Y'}{2} &= \frac{Y}{2} \frac{\tanh\left(\frac{j\beta l}{2}\right)}{\frac{j\beta l}{2}} = \frac{Y}{2} \frac{\sinh\left(\frac{j\beta l}{2}\right)}{\left(\frac{j\beta l}{2}\right) \cosh\left(\frac{j\beta l}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{j\omega Cl}{2}\right) \frac{j \sin\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\left(\frac{j\beta l}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta l}{2}\right)} = \left(\frac{j\omega Cl}{2}\right) \frac{\tan\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\frac{\beta l}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{Y'}{2} = \left(\frac{j\omega C' l}{2}\right) \quad S \quad (46).$$

Observamos lo siguiente: Z' y Y' son imaginarios puros. Para $\beta l < \pi$ radianes, Z' es inductiva pura y Y' es capacitiva pura. El circuito equivalente para línea sin pérdidas será como se muestra en la figura 28.

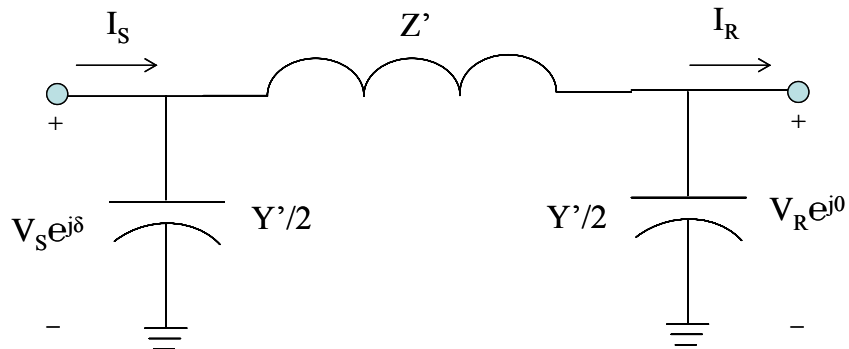


Figura 28. Circuito equivalente para línea sin pérdidas.

donde:

$$Z' = (j\omega Ll) \left(\frac{\sin(\beta l)}{\beta l} \right) = jx' \quad \Omega$$

$$\frac{Y'}{2} = \left(\frac{j\omega Cl}{2} \right) \frac{\tan\left(\frac{\beta l}{2}\right)}{\left(\frac{\beta l}{2}\right)} = \frac{j\omega C' l}{2} \quad S.$$

Longitud de onda.

La longitud de onda es la distancia requerida para cambiar la fase del voltaje ó corriente por 2π rads ó 360° .

Para la línea sin pérdidas:

$$V(x) = A(x)V_R + B(x)I_R = \cos(\beta x)V_R + jZ_C \sin(\beta x)I_R \quad (47)$$

$$I(x) = C(x)V_R + D(x)I_R = j \frac{\sin(\beta x)}{Z_C} V_R + \cos(\beta x)I_R \quad (48)$$

Vemos que $V(x)$ e $I(x)$ cambian fase para $x = \frac{2\pi}{\beta}$. Denotamos la longitud de onda por λ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{f\sqrt{LC}} \quad m \quad (49).$$

De la ecuación anterior vemos que:

$$f\lambda = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (50)$$

$f\lambda$: Velocidad de propagación de las ondas de voltaje y corriente. Para líneas de transmisión aéreas: $1/\sqrt{LC} \approx 3 \times 10^8$ m/s y a 60 Hz $\lambda \approx \frac{3 \times 10^8}{60} = 5 \times 10^6$ m = 5,000 km.

Carga Natural(SIL)

Es la potencia enviada por una línea sin pérdidas a una carga resistiva igual a la impedancia

característica $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$.



Figura 0.29. Línea sin pérdidas cargada al SIL.

$$\begin{aligned}
 V(x) &= \cos(\beta x)V_R + j \sin(\beta x)I_R = \cos(\beta x)V_R + jZ_C \sin(\beta x)\left(\frac{V_R}{Z_C}\right) \\
 &= (\cos(\beta x) + j \sin(\beta x))V_R = e^{j\beta x}V_R \quad \text{volts} \quad (51)
 \end{aligned}$$

de donde vemos que: $|V(x)| = |V_R|$. Lo anterior implica que al SIL el perfil de voltaje de la línea es *plano*, ó sea que la magnitud de voltaje es constante a lo largo de toda la línea.

De (48) vemos que al SIL:

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \frac{j \sin(\beta x)}{Z_C}V_R + \cos(\beta x)\frac{V_R}{Z_C} \\
 I(x) &= (\cos(\beta x) + j \sin(\beta x))\frac{V_R}{Z_C} = (e^{j\beta x})\frac{V_R}{Z_C} \quad \text{Amp} \quad (52).
 \end{aligned}$$

La potencia compleja a lo largo de la línea es:

$$\begin{aligned}
 S(x) &= P(x) + jQ(x) = V(x)I(x)^* \\
 &= (e^{j\beta x}V_R)\left(\frac{e^{j\beta x}V_R}{Z_C}\right)^* = \frac{|V_R|^2}{Z_C} \quad (53).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el flujo de potencia real a lo largo de la línea al SIL permanece *constante*. El flujo de potencia reactiva es cero, lo que indica, que la potencia reactiva producida por efecto capacitivo es consumida en la inductancia serie de la propia línea.

A voltaje nominal, la potencia real suministrada ó SIL será:

$$SIL = \frac{V_{nom}^2}{Z_C} \quad W \quad (54)$$

donde V_{nom} = voltaje de fase para potencia 1 ϕ

V_{nom} = voltaje de línea-línea para potencia 3 ϕ .

Perfiles de voltaje. La figura que se muestra abajo proporciona los perfiles de voltaje, para el caso de un voltaje de envío fijo de magnitud V_S desde $x = 0$ y $x = 1 = \lambda/4$. Se muestran cuatro condiciones:

1. En vacío, $I_{RNL} = 0$ y de (51): $V_{NL}(x) = \cos(\beta x)V_{RNL}$. Vemos que el voltaje se incrementa en el lado de envío de $V_S = \cos(\beta l)V_{RNL}$, en el lado de envío, a V_{RNL} en el lado de recepción.
2. De (51) al SIL vemos que el perfil de voltaje es plano.

3. Para carga en corto circuito ($Z_L = 0$), $V_{RSC} = 0$ y la ecuación (47) nos conduce a:

$$V_{SC}(x) = (Z_C \sin(\beta x))I_{RSC} \quad (55)$$

Vemos que el voltaje decrece de $V_S = (\sin \beta l)(Z_C I_{RSC})$, en el lado de envío, a un valor de $V_{RSC}=0$, en el lado de recepción.

4. El perfil de voltaje a plena carga depende de la corriente a plena carga I_{FL} , y está entre el perfil al SIL y a corto circuito.

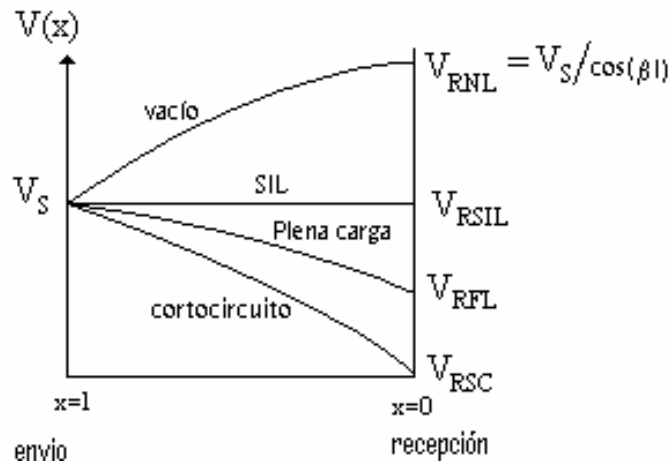
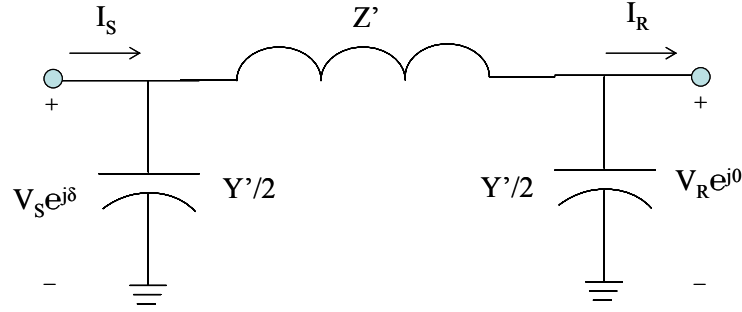


Figura 30. Perfiles de Voltaje.

Límite de Estabilidad en Estado Estable.

Supongamos que V_S y V_R se mantienen constantes. Sea δ el ángulo de fase entre V_S y V_R .



Aplicando LVK

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{V_S - V_R}{Z'} - \frac{Y'}{2} V_R \\ &= \frac{V_S e^{j\delta} - V_R}{jX'} - \frac{j\omega C'l}{2} V_R \end{aligned} \quad (56)$$

La potencia suministrada a la carga será:

$$\begin{aligned} S_R &= V_R I_R^* = V_R \left(\frac{V_S e^{j\delta} - V_R}{jX'} \right)^* + \frac{j\omega C'l}{2} V_R^2 \\ &= V_R \left(\frac{V_S e^{-j\delta} - V_R}{-jX'} \right) + \frac{j\omega C'l}{2} V_R^2 \\ &= \frac{jV_R V_S \cos\delta + V_R V_S \sin\delta - jV_R^2}{X'} + \frac{j\omega C'l}{2} V_R^2 \end{aligned} \quad (57)$$

La potencia real será:

$$P = P_S = P_R = \text{Re}\{S_R\} = \frac{V_R V_S}{X'} \sin\delta \quad \text{w} \quad (58)$$

$$P_{\max} = \frac{V_S V_R}{X'} \quad \text{w} \quad (59)$$

$P_{\max}$ es el límite de estabilidad en estado estable.

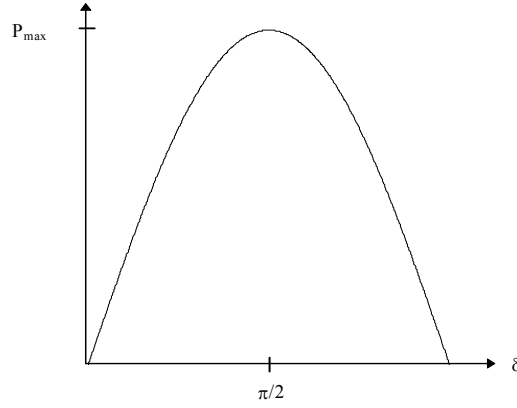


Figura 31. Curva potencia-ángulo.

Habíamos obtenido previamente $Z' = jZ_C \sin(\beta l) = jx' \quad \Omega$

sustituyendo en (58) tenemos

$$P = \frac{V_S V_R \sin \delta}{Z_C \sin \beta l} = \left(\frac{V_S V_R}{Z_C} \right) \frac{\sin \delta}{\sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)} \quad (60)$$

Expresando V_S y V_R en pu tomando como voltaje base el voltaje nominal de la línea.

$$P = \left(\frac{V_S}{V_{\text{nom}}} \right) \left(\frac{V_R}{V_{\text{nom}}} \right) \left(\frac{V_{\text{nom}}^2}{Z_C} \right) \frac{\sin \delta}{\sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)}$$

$$P = V_{\text{Spu}} V_{\text{Rpu}} (\text{SIL}) \frac{\sin \delta}{\sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)} \quad \text{W} \quad (61)$$

Para $\delta = 90^\circ$, límite teórico de estabilidad en estado estable:

$$P_{\max} = \frac{V_{\text{Spu}} V_{\text{Rpu}} (\text{SIL})}{\sin \left(\frac{2\pi l}{\lambda} \right)} \quad \text{W} \quad (62)$$

La ecuación (59) revela dos aspectos acerca del límite de estabilidad en estado estable:

- 1^o Se incrementa con el cuadrado del voltaje de línea.
- 2^o Decrece con la longitud de la línea (debido a que aumenta x').

Cargabilidad.

El nivel de carga de la línea de transmisión, (expresado en % del SIL) como función de la longitud de la línea, que es permisible considerando los límites: térmico, de caída de voltaje, y de estabilidad de estado estable, se denomina *cargabilidad*. En la figura se muestran las curvas de cargabilidad de líneas de transmisión no compensadas, para $V_{Spu} = V_{rpu} = 1.0 \text{ pu}$.

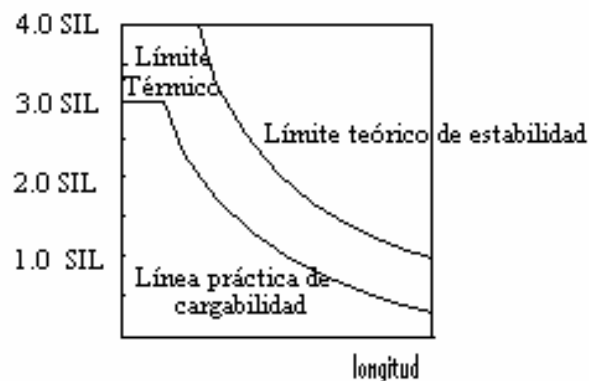


Figura 32. Curvas de cargabilidad.

La curva de cargabilidad práctica está basada en un límite de caída de voltaje, que generalmente es de $V_R/V_S \geq 0.95$ y en un desplazamiento angular, usualmente de 30° a 35° a lo largo de la línea (45° si se incluyen las reactancias equivalentes del sistema).

Flujo de Potencia Máximo.

Derivamos la ecuación de máximo flujo de potencia en función de los parámetros ABCD para una línea sin pérdidas. Definamos

$$A = \cosh(\gamma l) = A \angle \theta_A$$

$$B = Z' = Z' \angle \theta_Z$$

$$V_S = V_S \angle \delta \quad V_R = V_R \angle 0^0$$

Como sabemos que $V_S = AV_R + BI_R$, tenemos

$$I_R = \frac{V_S - AV_R}{B} = \frac{V_S e^{j\delta} - AV_R e^{j\theta_A}}{Z' e^{j\theta_Z}}$$

La potencia compleja en el lado de recepción será:

$$\begin{aligned} S_R &= P_R + jQ_R = V_R I_R^* = V_R \left[\frac{V_S e^{j(\delta - \theta_Z)} - AV_R e^{j(\theta_A - \theta_Z)}}{Z'} \right]^* \\ &= \frac{V_R V_S}{Z'} e^{j(\theta_Z - \delta)} - \frac{AV_R^2}{Z'} e^{j(\theta_Z - \theta_A)} \end{aligned} \quad (63).$$

De aquí:

$$P_R = \text{Re}\{S_R\} = \frac{V_R V_S}{Z'} \cos(\theta_Z - \delta) - \frac{AV_R^2}{Z'} \cos(\theta_Z - \theta_A) \quad (64)$$

$$Q_R = \text{Im}\{S_R\} = \frac{V_R V_S}{Z'} \sin(\theta_Z - \delta) - \frac{AV_R^2}{Z'} \sin(\theta_Z - \theta_A) \quad (65)$$

Para la línea sin pérdidas: $\theta_A = 0^0$, $B = Z' = jx'$, $Z' = x'$, $\theta_Z = 90^0$ y podemos simplificar la expresión para P_R :

$$P_R = \frac{V_R V_S}{x'} \cos(90 - \delta) - \frac{AV_R^2}{x'} \cos(90^0)$$

$$P_R = \frac{V_R V_S}{X'} \sin \delta \quad (\text{dado que } \cos(90^\circ - \delta) = \sin \delta) \quad (66).$$

Esta última expresión coincide con la obtenida anteriormente.

La potencia real máxima suministrada (límite de estabilidad en estado estable) ocurre para $\delta = \theta_Z$ en (64):

$$P_{R_{\max}} = \frac{V_R V_S}{Z'} - \frac{A V_R^2}{Z'} \cos(\theta_Z - \theta_A) \quad (67)$$